頂点と変曲点

クリスカ [*][†]

2014 年 3 月 21 日

概要

増減表を用いてグラフを描いていると, その特徴として頂点や変曲点というものが重要になってくる. では, この頂点や変曲点とはいったい何者だろうか? またどのような違いがあるのだろうか? 順番に紐解いていこう.

1　曲がり具合を調べる

車を運転していると, 屈曲有りの警戒標識を見かけることがあるだろう. この標識の下には, 例えば「$R=500$」のような文字が書かれていることがある. これは, 「この道路のカーブは半径 $500m$ の円と同じ曲がり具合ですので注意してください.」という意味を表している. つまり, 曲線の曲がり具合というものを同じ曲がり具合を持つ円周の一部だと見なし, この円の半径を与えることによって表現しているのだ. 当然円の半径が小さければ小さい程急なカーブを描き, 半径が大きければ大きい程緩やかなカーブを描いている. この円を**接触円**または**曲率円**といい, この半径を**曲率半径**という. この曲率半径の逆数を**曲率**という.
曲がり具合を考えるのに, 曲率半径だけを考えると, それは右に曲がっているのか左に曲がっているのかは分からない. そこで曲率の値は符号付きで考え, 進行方向左向きに曲がる場合の曲率の値を正, 右向きに曲がる場合の曲率の値を負で表す. すると, 曲率の値は実数の値をとることになるが, 曲率の値が 0 や ∞ とは幾何学的にはどのような意味を表しているのだろうか？実は, 曲率が 0 であるとは, 曲率半径が ∞ であることを意味している. 即ちこれは直線である. どうように, 曲率が ∞ であるとは, 曲率半径が 0 であるので, これは一点を表している.
では, 二次曲線 $(y=ax^2)$, 四次曲線 $(y=ax^4)$ の原点における曲率を計算してみよう.
二次曲線
二次曲線 $y=ax^2 \quad (a>0)$ 上の 3 点 $(0,0)$, $(\varepsilon, a\varepsilon^2)$, $(-\varepsilon, a\varepsilon^2)$ を通る円は

$$x^2+\left(y-\frac{a^2\varepsilon^2+1}{2a}\right)^2=\left(\frac{a^2\varepsilon^2+1}{2a}\right)^2$$

となる. よって, ε を 0 に近づけたときの極限をとると

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2a}\right)^2=\left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

となり, 曲率円の半径は $\dfrac{1}{2a}$ であるので, 曲率は $2a$ となる.

[*] k-nakagawa@h6.dion.ne.jp
[†] ニコニコミュニティ：日本数楽会

四次曲線
四次曲線 $y = ax^4 \quad (a > 0)$ 上の 3 点 $(0,0)$, $(\varepsilon, a\varepsilon^4)$, $(-\varepsilon, a\varepsilon^4)$ を通る円は

$$x^2 + \left(y - \frac{a^2\varepsilon^6 + 1}{2a\varepsilon^2}\right)^2 = \left(\frac{a^2\varepsilon^6 + 1}{2a\varepsilon^2}\right)^2$$

となる．よって, ε を 0 に近づけたときの極限をとり式を整理すると

$$\frac{1}{a}y = 0 \quad \text{i.e.} \quad y = 0$$

となり, 曲率円は直線であるので, 曲率は 0 となる．

2 頂点と変曲点

曲線上の点に対して曲率が一つ決まり, その値は一般的にはそれぞれ違う．(曲率が一定の定数をとるとき, 元の曲線は円 (曲率 $\neq 0$) か直線 (曲率 $= 0$) を表している.) ここで曲率を κ と表すことにする．
曲率が極大値或いは極小値になるような点を曲線の**頂点**という．曲率が極大値或いは極小値を取るならば $\kappa' = 0$ となるので, これを広い意味で頂点と定義することもある．
曲率の符号が変化する点を曲線の**変曲点**という．曲率の符号が変化するならば $\kappa = 0$ となるので, これを広い意味で変曲 点と定義することもある．

3 接触

2 つの曲線が点 P で **1 次の接触**または **2 点接触**をするとは, 2 曲線がともに点 P を通り, その点における接線と進行方向を共有することである．
2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = p$ で 1 次の接触をしているとは,

$$f(p) = g(p), \quad \frac{df}{dx}(p) = \frac{dg}{dx}(p)$$

が成り立つことである．このとき, 更に

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(p) = \frac{d^2 g}{dx^2}(p)$$

が成り立つならば, 2 つの曲線は P で **2 次の接触**または **3 点接触**をするという．
一般に, **k 次の接触**または **$k+1$ 点接触**をするとは,

$$f(p) = g(p), \quad \frac{df}{dx}(p) = \frac{dg}{dx}(p), \quad \ldots, \quad \frac{d^k f}{dx^k}(p) = \frac{d^k g}{dx^k}(p), \quad \frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}}(p) \neq \frac{d^{k+1} g}{dx^{k+1}}(p)$$

を満たすことをいう．このとき, k を接触の**位数**という．また, 上の条件において, $\dfrac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}}(p) \neq \dfrac{d^{k+1} g}{dx^{k+1}}(p)$ を取り除いた条件

$$f(p) = g(p), \quad \frac{df}{dx}(p) = \frac{dg}{dx}(p), \quad \ldots, \quad \frac{d^k f}{dx^k}(p) = \frac{d^k g}{dx^k}(p)$$

を満たすとき, **少なくとも k 次の接触**または**少なくとも $k+1$ 点接触**をするという．
$k+1$ 点接触とは, 2 つの曲線の $k+1$ 個の共有点が 1 点に集まった接触という意味と解釈できる．
曲線の接線は一般に曲線と少なくとも 1 次の接触をする直線である．しかし, 曲線上の特殊な点における接線は曲線と 2 次以上の接触を持つことがある．このとき, 曲線とその接線が 2 次の接触を持つような点を**通常変曲点**といい, そのときの接線を**変曲接線**という．また, 曲線とその接線が 2 次より大きい接触を持つ点を**高次の変曲点**または**退化した変曲点**という．
曲線と接触円は一般に曲線と少なくとも 2 次の接触をする．しかし, 曲線上の特殊な点における接触円は曲線と 3 次以上の接触を持つことがある．このとき, 曲線とその接触円が 3 次の接触を持つような点を**通常頂点**という．また, 曲線とその接触円が 3 次より大きい接触を持つ点を**高次の頂点**または**退化した頂点**という．