

常用対数の概数

クリスカ^{*†}

2014 年 2 月 8 日

問題

以下の不等式を証明せよ.

(1) $0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$

(2) $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$

(3) $0.84 < \log_{10} 7 < 0.85$

解答

(1)

$$10^{30} = 1000^{10} < 1024^{10} = 2^{100}$$

より

$$0.30 < \log_{10} 2$$

また,

$$2^{13} = 8192 < 10^4$$

より

$$\log_{10} 2 < \frac{4}{13} < 0.30769 \cdots < 0.31$$

よって,

$$0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$$

^{*} k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

[†] ニコニココミュニティ：日本数学会

(2)

$$5^3 \times 3^4 = 125 \times 81 = 10125 > 10000 = 10^4$$

より

$$3 \log_{10} 5 + 4 \log_{10} 3 > 4$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 &> \frac{4 - 3(1 - \log_{10} 2)}{4} \\ &= \frac{1 + 3 \log_{10} 2}{4} \\ &> \frac{1 + 3 \times 0.30}{4} \\ &= 0.475 \\ &> 0.47 \end{aligned}$$

また,

$$2^2 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972 < 1000 = 10^3$$

より

$$2 \log_{10} 2 + 5 \log_{10} 3 < 3$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 &< \frac{3 - 2 \log_{10} 2}{5} \\ &< \frac{3 - 2 \times 0.30}{5} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

よって,

$$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$$

(3)

$$3 \times 7^3 = 3 \times 343 = 1029 > 1000 = 10^3$$

より

$$\begin{aligned}\log_{10} 3 + 3 \log_{10} 7 &> 3 \\ \log_{10} 7 &> \frac{3 - \log_{10} 3}{3} \\ &> \frac{3 - 0.48}{3} \\ &= 0.84\end{aligned}$$

また,

$$2 \times 7^2 = 2 \times 49 = 98 < 100 = 10^2$$

より

$$\begin{aligned}\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 7 &< 2 \\ \log_{10} 7 &< \frac{2 - \log_{10} 2}{2} \\ &< \frac{2 - 0.30}{2} \\ &= 0.85\end{aligned}$$

よって,

$$0.84 < \log_{10} 7 < 0.85$$

研究

1 ~ 10 までの常用対数の概数は以下の計算を用いて求めることが出来る.

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3$$

因みに下 4 桁までの値は以下のようにになっている.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10} n$	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031	0.9542	1