写像芽

クリスカ[*†]

2012 年 10 月 13 日

可微分写像たちは, たとえ局所的な振る舞いが全く同一である場合でも, 必ずしも, 大域的な振る舞いが同一になるとは限りません. しかし, 可微分写像に対しては局所的な振る舞いのみを使い定義される概念も色々とあります. 例えば, 「微分可能性」 という概念などが例にあたります. このような概念は 「局所的な振る舞い」 という対象を厳密に定義する必要性を感じさせ, 同値類を新しい対象にするという古来からの標準的方法により, 「写像芽(しゃぞうが)」 と呼ばれる対象が自然に誕生します. 可微分写像の局所理論は可微分写像芽の理論であると言っても過言ではありません.

写像の局所的振る舞いの厳密な定義をするためには, source や target の局所的様相の厳密な定義が必要となりますので, まずはそのために 「集合芽(しゅうごうが)」 の定義から始めます.

定義 1 (集合芽)

X を位相空間, X_1, X_2 を X の部分空間とする. X_1, X_2 が X の点 x_0 で同じ集合芽を定めるとは, x_0 のある開近傍 U 上では $X_1 \cap U = X_2 \cap U$ が成立することである.

点 x_0 で同じ集合芽を定めるという関係は, 同値関係となるので, 同値類を考えることが出来ます. X_1 を含む同値類を X_1 の点 x_0 での集合芽と呼び, (X_1, x_0) と書きます.

定義 2 (写像芽)

N, P を位相空間とし, U_1, U_2 を N の点 x_0 の開近傍とする. 二つの写像 $f_1 : U_1 \to P$, $f_2 : U_2 \to P$ が点 x_0 で同じ写像芽を定めるとは, $U_1 \cap U_2$ に含まれる, x_0 のある開近傍 W 上では $f_1|_W = f_2|_W$ が成立することである.

点 x_0 で同じ写像芽を定めるという関係は, 同値関係となるので, 同値類を考えることが出来ます. f_1 を含む同値類を写像 f_1 の点 x_0 での写像芽と呼び, $[f_1]_{x_0}$ あるいは単に f_{1x_0} と書きます. 写像芽 $[f_1]_{x_0}$ を $f_1 : (N, x_0) \to P$ と表したり, $f_1 : (N, x_0) \to (P, f_1(x_0))$ と表すこともあります. また, f_1 は写像芽 f_{1x_0} の代表であるといいます. 写像芽には, その点での写像の局所的情報がすべてつめこまれています.

N, P が可微分多様体, f_1 が可微分写像であるときは, 微分可能であることがよく分かるように, 写像芽 $f_1 : (N, x_0) \to (P, f_1(x_0))$ は可微分写像芽と呼ばれるのが通常です. source の可微分多様体 N の点 x_0 を中心とする可微分座標近傍 (U, φ) (即ち, (U, φ) は N の可微分座標近傍であり, $x_0 \in U$, $\varphi(x_0) = 0$ を満たしている) と target の可微分多様体 P の点 $f_1(x_0)$ を中心とする可微分座標近傍 (V, ψ) をそれぞれ取ると, 可微

[*] k-nakagawa@h6.dion.ne.jp
[†] ニコニコミュニティ：日本数楽会

分写像芽 $f_1:(N,x_0)\to(P,f_1(x_0))$ を考えることは, 可微分写像芽 $\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1}:(\mathbf{R}^{\dim N},0)\to(\mathbf{R}^{\dim P},0)$ を考えることに他なりません.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^{\dim N} \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi\circ f_1\circ\varphi^{-1}} \\ P & \xrightarrow[\psi]{} & \mathbf{R}^{\dim P} \end{array}$$

　マザー理論の中心部分は $f:(\mathbf{R}^n,0)\to(\mathbf{R}^p,0)$ という形の可微分写像芽に対する深い考察であり, 局所理論と呼ばれています.