Dedekind の切断

クリスカ[*][†]

2012 年 4 月 27 日

定義 1 ((Dedekind の) 切断)
全順序集合 K に対して, $K = A \cup A'$, $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$, $A \cap A' = \emptyset$ なる K の部分集合 A, A' が $\forall x \in A$, $\forall y \in A' \Rightarrow x < y$ を満たすとき, **切断** (cut(English), Schnitt(Deutsch)) といい, A, A' をそれぞれ下組, 上組という. この切断を $(A|A')$ と書く.

上記のように Dedekind の切断を定義すると, 理論上 4 種類の切断方法がある.

定義 2 (切断の種類)

第 1 種の切断 : $\exists \max A,\ \nexists \min A' \quad (A$ には最大元があり$, A'$には最小元がない$)$

第 2 種の切断 : $\nexists \max A,\ \exists \min A' \quad (A$ には最大元がなく$, A'$には最小元がある$)$

第 3 種の切断 : $\nexists \max A,\ \nexists \min A' \quad (A$ には最大元がなく$, A'$にも最小元がない$)$

第 4 種の切断 : $\exists \max A,\ \exists \min A' \quad (A$ には最大元があり$, A'$にも最小元がある$)$

Remark 1 (切断の具体例)
$K = \mathbb{Z}$ とすると, 切断の種類は第 4 種の切断のみ.
$K = \mathbb{Q}$ とすると, 切断の種類は第 $1 \sim 3$ 種の切断がある.

Remark 2 ($K = \mathbb{Q}$ とすると, 第 4 種の切断がない理由)
第 4 種の切断があると仮定すると, 切断の定義より $\max A < \min A'$ となる.
ここで, $\max A < x < \min A'$ を満たす $x \in \mathbb{Q}$ は $x \notin A$, $x \notin A'$ となるが $x \in \mathbb{Q} = A \cup A'$ となり切断の定義に反する.

以下 $K = \mathbb{Q}$ について考える.
$(A|A')$ は第 1 種の切断 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\},\ A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$
$(A|A')$ は第 2 種の切断 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\},\ A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq a\}$
逆に $a \in \mathbb{Q}$ に対して, 上の方法で第 1 種, 第 2 種の切断を構成できる.

$$\text{第 1 種の切断} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Q} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{第 2 種の切断}$$

以後は第 2 種の切断は考えないことにする.
第 1 種の切断を有理数だと思う (同一視する) ことができる.
第 3 種の切断に対応するものは $\mathbb{Q}$ の中には存在しない. $\longrightarrow$ 無理数

[*] k-nakagawa@h6.dion.ne.jp
[†] ニコニコミュニティ：日本数楽会

定義 3 (実数)
$\mathbb{R} := \{x \mid x$ は有理数または無理数 $\}$: 実数系

Remark 3 (有理切断, 無理切断)
第 1 種の切断 (第 2 種の切断) を **有理切断** という.
第 3 種の切断 を **無理切断** という.

以後, 切断は第 1 種または第 3 種とする.
$\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ としたとき, $A \subsetneqq B$, $A = B$, $A \supsetneqq B$ のいずれか 1 つが必ず成立する.

Remark 4 (集合の大小関係の一意性)
$\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ として, $A \subsetneqq B$, $A \supsetneqq B$ の少なくとも 1 つが必ず成り立っていることを示す. そのために, このどちらも成り立っていないと仮定する. これは $A \backslash B \neq \emptyset$, $B \backslash A \neq \emptyset$ を意味する. つまり, $a \in A \backslash B (\subset A)$, $b \in B \backslash A (\subset B)$ となる a, b が存在する.
ところが, $a \in A \backslash B (\subset A) \subset B'$ を意味する ($(B|B')$ が切断だから) . 同様に, $b \in B \backslash A \subset A'$ を意味する. しかし, $(A|A')$ が切断であるから, 切断の定義より A の元は A' の元より小さくなくてはいけない. よって, $a < b$ である. 同様に, $(B|B')$ が切断であるから, 切断の定義より B の元は B' の元より小さくなくてはいけない. よって, $b < a$ である. この 2 つは矛盾しているので, 背理法によって $A \subsetneqq B$ または $A \supsetneqq B$ のどちらも成り立っていないことはあり得ない.

定義 4 (実数の大小)
2 つの実数 (= 切断) $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ が与えられたときその大小を以下のように定義する.

- $A \subsetneqq B$ のとき, $\alpha < \beta$ と " $<$ " を定義する.
- $A = B$ のとき, $\alpha = \beta$ と " $=$ " を定義する.
- $A \supsetneqq B$ のとき, $\alpha > \beta$ と " $>$ " を定義する.
- $\alpha < \beta$ または $\alpha > \beta$ のとき, $\alpha \neq \beta$ と " $\neq$ " を定義する.

Remark 5 ($0 \in \mathbb{Q}$ に対応する切断)
$(0|0')$ を 0 で表す.
$(但し, 0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\},\ 0' = \mathbb{Q} \backslash 0)$

Remark 6 (有理数の稠密性)
$\alpha < \beta$ ならば $\alpha < m < \beta$ を満たす $m \in \mathbb{Q}$ が (無数に) ある.
何故ならば, 仮定により $A \subsetneqq B$. 故に $c \in A' \cap B$ となるような $c \in \mathbb{Q}$ がとれる. ここで, 第 1 種の切断も第 2 種の切断も同じことであったので, 第 2 種の切断を考えた場合, 仮に第 3 種の切断であったとしても共に B には最大数がないことになるので, $c < m \in B$ なる $m \in \mathbb{Q}$ は無数にあることが分かる. よって $\alpha < m < \beta$ がいえる.

定義 5 (実数の加減乗除)
2 つの実数 (= 切断) を $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ とする.

1. α と β の **和** $\alpha + \beta = \gamma$ を $\gamma = (C|C')$ で定義する.
   但し, $C' = \{a' + b' \mid a' \in A', b' \in B'\}$, $C \in Q \backslash C'$
2. α と β の **差** $\alpha - \beta = \delta$ を $\delta = (D|D')$ で定義する.
   但し, $D' = \{a' - b \mid a' \in A', b \in B\}$, $D \in Q \backslash D'$
3. α と β の **積** $\alpha\beta = \xi$ を 次で定義する.
   $\alpha > 0$, $\beta > 0$ のとき, $\xi = (X|X')$ で定義する.
   但し, $X' = \{a'b' \mid a' \in A', b' \in B'\}$, $X \in Q \backslash X'$
   $$\text{その他の場合は}\ \xi := \begin{cases} -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0, \beta < 0\ \text{のとき} \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0, \beta > 0\ \text{のとき} \\ ((-\alpha)(-\beta)) & \alpha < 0, \beta < 0\ \text{のとき} \\ 0 & \alpha = 0\ \text{または}\beta = 0\ \text{のとき} \end{cases}$$
   $-\alpha = 0 - \alpha \quad \text{etc.}$
4. α と β の **商** $\dfrac{\alpha}{\beta} = \eta$ を 次で定義する.
   $\alpha > 0$, $\beta > 0$ のとき, $\eta = (Y|Y')$ で定義する.
   但し, $Y' = \left\{ \dfrac{a'}{b} \;\middle|\; a' \in A', b \in B, b > 0 \right\}$, $Y \in Q \backslash Y'$
   $$\text{その他の場合は}\ \eta := \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{-\beta} & \alpha > 0, \beta < 0\ \text{のとき} \\ -\dfrac{-\alpha}{\beta} & \alpha < 0, \beta > 0\ \text{のとき} \\ \dfrac{-\alpha}{-\beta} & \alpha < 0, \beta < 0\ \text{のとき} \\ 0 & \alpha = 0, \beta \neq 0\ \text{のとき} \end{cases}$$
   $-\alpha = 0 - \alpha \quad \text{etc.}$

Remark 7 (減法と除法についての注意)
$D' = \{a' - b' \mid a' \in A', b' \in B'\}$ ではない.
$Y' = \left\{ \dfrac{a'}{b'} \;\middle|\; a' \in A', b' \in B', b' > 0 \right\}$ ではない.

定理 1 (実数の稠密性)
2 つの相異なる実数の間には, 無数の有理数と無理数が存在する.

$< proof >$
実数と切断を同一視し, $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$, $\alpha < \beta$ とおく.
無数の有理数の存在を示す. そのためには $\alpha < a < b < \beta$ なる $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ の存在をいえばよい.
(有理数の稠密性より a と b の間に無数の有理数が存在するから.)
$\alpha < \beta$ なので $A \subsetneqq B$, 従って $\exists c \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad c \in B \backslash A$
$\alpha \in \mathbb{Q}$ のとき, $\alpha < \dfrac{\alpha + c}{2} < c < \beta$, $\dfrac{\alpha + c}{2} \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Q}$
従って $a = \dfrac{\alpha + c}{2} \in \mathbb{Q}$, $b = c \in \mathbb{Q}$ とすればよい.
$\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき, $c \in A'$ であり, $\min A'$ は存在しないので, $\exists a \in A' \quad \text{s.t.} \quad a < c$
よって $b = \dfrac{a + c}{2}$ とおくと, $a, b \in \mathbb{Q}$ となり, $\alpha < a < b < \beta$

無数の無理数をの存在を示す.
$\gamma \notin \mathbb{Q}$ とすると, $\alpha - \gamma < d < \beta - \gamma$ となる $d \in \mathbb{Q}$ が無数に存在する.
よって, $\alpha < \gamma + d < \beta, \gamma + d \notin \mathbb{Q}$

$< proof\ end >$

定理 2 (Dedekind の基本定理, 実数の連続性)
$(A|A')$ を実数の切断 (有理数の切断の $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ としたもの) とすると, $\max A$ または $\min A'$ が存在する.
(第 3 種の切断は起こらない.)

$< proof >$
$B = A \cap \mathbb{Q}$, $B' = A' \cap \mathbb{Q}$ とおくと, $(B|B')$ は切断となる.
よって, $(B|B')$ はある $\alpha \in \mathbb{R}$ を定義する.
$A \cup A' = \mathbb{R}$ なので $\alpha \in A$ または $\alpha \in A'$ となる.
ここで "$\alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$; $\alpha \in A' \Rightarrow \alpha = \min A'$" を示す.
$\alpha \in A$ であって, $\alpha < \beta$ なる $\beta \in A$ が存在したとする.
すると実数の稠密性より $(B|B') = \alpha < b < \beta$ を満たす $b \in \mathbb{Q}$ が存在する.
$b > \alpha$ より $b \in B' \subset A'$ となるので $\beta > b$ より $\beta \in A'$ がいえる.
これは $A \cap A' = \emptyset$ に矛盾する.
従って $\alpha = \max A$ となる.
同様に $\alpha \in A' \Rightarrow \alpha = \min A'$ も示される.

$< proof\ end >$