# 漸化式の解法について

クリスカ[*]

2011 年 8 月 28 日

## 1　漸化式の定義

数列 $a_n$ のいくつかの連続する項の値から, それぞれ次の項を与える関係

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) \\ a_{n+2} &= g(a_{n+1}, a_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

などを, 数列 $\{a_n\}$ の**漸化式** といいます.
与えられた漸化式を満たすことを要求し, さらに, はじめのいくつかの項を指定すると $\{a_n\}$ は決定します.
このような数列の決め方を, 漸化式による (帰納的) 定義といいます.

## 2　定数係数線型 2 項間漸化式 ($a_{n+1} = pa_n + q$ 型)

$p$, $q$ を $n$ によらない定数として, 漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \cdots\cdots ⊛$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えてみましょう.

### 2.1　$p = 1$ のとき

$p = 1$ の場合 ⊛ は, $\{a_n\}$ が公差 $q$ の等差数列であることを意味します. よって

$$a_n = a_1 + (n-1)q$$

が求める結果です.

### 2.2　$p \neq 1$ のとき

定数数列 $\{\alpha\}$ が ⊛ を満たすとすれば,

$$\alpha = p\alpha + q \qquad \cdots\cdots ①$$

* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

となります. このとき,

$$\alpha = \frac{q}{1-p}$$

となります. ここで, ⊛ と ① を辺々引き算すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= pa_n + q - p\alpha - q \\ &= p(a_n - \alpha) \end{aligned}$$

すなわち, 漸化式 ⊛ が

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \cdots\cdots ②$$

と書き直されます. ② は数列 $\{a_n - \alpha\}$ が公比 $p$ の等比数列であることを示しています.
したがって,

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha \\ &= \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

これが求める結果です.

**研究**

漸化式 ⊛ において, $q = 0$ であれば, 数列 $\{a_n\}$ は公比 $p$ の等比数列となります.
そこで, 漸化式を変形して数列 $\{a_n - \alpha\}$ が, 公比 $p$ の等比数列となるように出来ないか考えてみます.
それには, 定数 $\alpha$ の決め方が鍵になります.
$a_{n+1} = pa_n + q \qquad \cdots\cdots$ Ⓐ
が,
$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \qquad \cdots\cdots$ Ⓑ
に変形できたとします. すると, Ⓑ から $a_{n+1} = pa_n + \alpha - p\alpha$ が得られるので, Ⓐ と比較して $q = \alpha - p\alpha$ すなわち $\alpha = p\alpha + q$ となります.
したがって, 漸化式で $a_{n+1}, a_n$ を $\alpha$ とおいた $\alpha$ についての 1 次方程式 $\alpha = p\alpha + q$ の解を Ⓑ にあてはめれば良いことが分かります.