媒介変数による微分

クリスカ*

2011 年 5 月 2 日

$x = x(t)$, $y = y(t)$ において, $x(t)$ は狭義単調とすると, y は x の関数と考えられる. このとき, $x(t)$, $y(t)$ が微分可能で, $x'(t) \neq 0$ ならば, y は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \left(= \frac{y'}{x'} \right).$$

何故ならば,
$t = x^{-1}(x)$ より $y = y(x^{-1}(t))$. これに, 合成関数と逆関数の微分公式を適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{dy}{dt}\frac{1}{dx/dt} \\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \end{aligned}$$

(狭義単調とは狭義単調増加または狭義単調減少のことであり, 狭義単調ならば, 1 対 1 であるから逆関数も存在して, これも狭義単調となる.)

更に, $dx/dt \neq 0$ のとき,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx/dt \cdot d^2y/dt^2 - d^2x/dt^2 \cdot dy/dt}{(dx/dt)^3} \left(= \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x')^3} \right).$$

何故ならば, $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ とおくと,

* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{d(y')}{dx}\right)x' - y'\left(\frac{d(x')}{dx}\right)}{(x')^2} \\
&= \frac{\left(\frac{d(y')}{dt}\frac{dt}{dx}\right)x' - y'\left(\frac{d(x')}{dt}\frac{dt}{dx}\right)}{(x')^2} \\
&= \frac{\left(y''\frac{1}{x'}\right)x' - y'\left(x''\frac{1}{x'}\right)}{(x')^2} \\
&= \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x')^3} \\
&= \frac{dx/dt \cdot d^2y/dt^2 - d^2x/dt^2 \cdot dy/dt}{(dx/dt)^3}
\end{aligned}
$$