逆写像定理と陰関数定理

クリスカ*

2011 年 5 月 1 日

逆写像定理
$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合, $f : U \to \mathbf{R}^n$ を C^r 写像で, 1 点 $a \in U$ において $\det Df_a \neq 0$ とする．そのとき, U における a の開近傍 U_1 と $\mathbb{R}^n$ における $f(a)$ の開近傍 V_1 が存在して, C^r 同型写像 $f : U_1 \to V_1$ である．

陰関数定理
$m \geq n$ とする．U を $\mathbb{R}^m$ における原点 $\mathbf{0}$ の開近傍, $f : U \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ を $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となる C^r 写像とする．もし, $\mathbf{0}$ における f の Jacobian matrix $Df_{\mathbf{0}}$ の階数が n に等しいならば, $\mathbb{R}^m$ における $\mathbf{0}$ の開近傍 U_1, V_1 で $U_1 \subset U$ となるものと, C^r 同型写像 $h : V_1 \to U_1$ であって, $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ かつ $(x_1, \ldots, x_m) \in V_1$ に対して

$$fh(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つものが存在する．

陰関数定理から逆写像定理を導く
前述の陰関数の定理において

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{0})\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

の階数が n に等しいとする．$p(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$ により $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ を定義するとき, h として $p \circ h = p$ を満たすものがとれる．
上の状況において $M = f^{-1}(\mathbf{0}) \cap U_1$ とおく．そのとき, $\varphi = p|_M : M \to \mathbb{R}^{m-n}$ は開集合 $W = \varphi(M)$ の上への同相写像である．しかも, その逆写像を $g : W \to M$ とかくと, g を $\mathbb{R}^{m-n}$ の開集合 W から $\mathbb{R}^n$ への写像とみて, g は C^r 写像である．
実際, h の性質により $h^{-1}(M) = V_1 \cap \{(0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_m)\}$ であり, $p \circ h = p$ となるように h をとっておけば

$$\varphi \circ h(0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

であるから, $\varphi \circ h$ の像は開集合であり $\varphi \circ h$ は $h^{-1}(M)$ から W の上への同相写像である．h が C^r 同型写像だから φ も M から W の上への同相写像である．
同様に, $h^{-1} \circ g(x_{n+1}, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ だから $h^{-1} \circ g$ は C_r 写像であり, したがって g もそうである．

* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

M の点 $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ に対して

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

であるから, 上の事実は M の点 $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ はその $m - n$ 個の座標 $x_{n+1}, \ldots, x_m$ で定まり, 残りの座標 $x_1, \ldots, x_n$ は $x_{n+1}, \ldots, x_m$ の C^r 関数として解けることを示している.