Gauss の平均値定理

クリスカ*

2011 年 1 月 28 日

定理 (Gauss の平均値定理)
$f(z)$ が, a を中心とする円 C の内部および周上で正則であるとする. C 上における $f(z)$ の値の平均は $f(a)$ に等しい.

解答
Cauchy の積分公式により

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

C の半径を r とすれば, C の方程式は $|z-a| = r$, すなわち $z = a + re^{i\theta}$. よって上式は

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta \qquad \left(\because\ dz = ire^{i\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta \end{aligned}$$

となり, これが求める結果である.

問題 1

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

の値を求めよ.

解答
$f(z) = \sin^2 z$ とおくと, これは $\dfrac{\pi}{6}$ を中心とする半径 2 の円の内部及び周上で正則である. よって,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right)\, d\theta = \sin^2\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

問題 2
円 $|z-5+2i|=3$ 上での, x^2-y^2+2y の平均値を求めよ.

解答
$z=x+iy$ とおくと, $x^2-y^2+2y=\Re\left(z^2-2iz\right)$ となる. また, 平均値は以下のようになる.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left((5-2i)+3e^{i\theta}\right)\ d\theta$$

ここで, $f(z)=\Re\left(z^2-2iz\right)$. よって Gauss の平均値定理より,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left((5-2i)+3e^{i\theta}\right)\ d\theta=\Re\left(z^2-2iz\right)\Big|_{z=5-2i}=\Re\left(17-30i\right)=\boxed{30}$$

問題 3

$$\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\ d\theta=-\pi\ln 2$$

を証明せよ.

解答
$f(z)=\ln(1+z)$ とおくと,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\left(1-2e^{i\theta}\right)\right)\ d\theta=\ln(1+1)=\ln 2$$

となる. また,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(1+\left(1-2e^{i\theta}\right)\right)\ d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(2-2e^{i\theta}\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2-2e^{i2\theta}\right)\ d2\theta \qquad (\theta\to 2\theta) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2-2e^{i2\theta}\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\ln\left(2-2e^{i2(\pi-\theta)}\right)\ d(\pi-\theta) \qquad (\theta\to\pi-\theta) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2-2e^{-i2\theta}\right)\ d\theta
\end{aligned}$$

と書き直すことも出来る.

$$\therefore\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2-2e^{i2\theta}\right)\ d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2-2e^{-i2\theta}\right)\ d\theta=\pi\ln 2$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\ln\left(2-2e^{i2\theta}\right) &= \ln\left(2-2\cos 2\theta - 2i\sin 2\theta\right) \\
&= \ln\frac{\left(2-2\cos 2\theta - 2i\sin 2\theta\right)\left(2-2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta\right)}{2-2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta} \\
&= \ln\frac{4-8\cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta + 4\sin^2 2\theta}{2-2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta} \\
&= \ln\frac{8-8\cos 2\theta}{2-2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta} \\
&= \ln\frac{8-8\left(1-2\sin^2\theta\right)}{2-2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta} \\
&= \ln\frac{16\sin^2\theta}{2-2e^{-i2\theta}} \\
&= 4\ln 2 + 2\ln\sin\theta - \ln\left(2-2e^{-i2\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \ln\sin\theta = \frac{\ln\left(2-2e^{i2\theta}\right)+\ln\left(2-2e^{-i2\theta}\right)}{2} - 2\ln 2$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \ln\sin\theta &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi \ln\left(2-2e^{i2\theta}\right)\ d\theta + \int_0^\pi \ln\left(2-2e^{-i2\theta}\right)\ d\theta\right\} - \int_0^\pi 2\ln 2\ d\theta \\
&= \pi\ln 2 - 2\pi\ln 2 \\
&= \boxed{-\pi\ln 2}
\end{aligned}$$