

JMO 添削課題 20190927

2019年9月27日

A 代数

A-1

a, b, c, d は $a > b, c > d$ を満たす正の実数とする.

$$a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2 = 1$$

$$(ac - bd)^2 = a^2 - d^2$$

を満たしているとき, a の値はいくつか?

出典 : 2019 KMO 1st test

C 組合せ

C-1

5桁の数 $ABCDE$ が $A < B, B > C, C < D, D > E$ を満たすとき良い数と定義する.

例: 15450, 15490

いくつの良い数があるか?

出典 : AoPS (<https://www.artofproblemsolving.com/community/c4h1705356>)

G 幾何

G-1

$\triangle ABC$ は, 頂点 A, B, C がそれぞれ $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ となる鋭角三角形である. 垂線 AP, BQ, CR は垂心 H で交差している. 辺 BC および辺 AC 上に点 N, L を線分 NL が点 H を通り, $\angle AHQ$ の二等分線となるようにそれぞれ取る. $\triangle ABC$ の外接円上に小さな弧 AB を二等分するように点 F を取る. このとき, $\angle NFL$ を求めよ.

出典 : AoPS (<https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1176079>)

N 整数論

N-1

m, n は自然数とする.

(1) $n! + 2019 = m^2$ を満たす (n, m) をすべて求めよ.

(2) $n! + 123 = m^3$ を満たす (n, m) をすべて求めよ.

出典 : 自作問題