

# JMO 添削課題 20190910

2019年9月10日

## A 代数

### A-1

$a, b$  を整数とする. また,  $|b| < 365$  を満たしたいとする. このとき  $Q(x) = x^2 + ax + b$  とおく. 方程式  $|Q(x)|^2 = 1$  が 4 つの正整数を解に持つ (必ずしも異なっていない) とき,  $(a, b)$  の取り得る値の組はいくつあるか?

出典: 2017 HKIMO-Pre # 14

### A-2

$a, b, c \geq 0$  かつ  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  を満たしているとき,  $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$  を証明せよ.

出典: 1999 Belarus TST # 4

## C 組合せ

### C-1

クラスには, 1 から 12 までのクラス番号がつけられた生徒が 12 人いる. 各生徒はコインを投げ, 表が出ればクラス番号に等しいスコアを獲得し, そうでなければ 0 のスコアを獲得する. クラスの合計スコアが 3 で割り切れる確率はいくつか?

出典: 2018 HKIMO-Pre # 18

### C-2

日本の伝統芸能の一つに香道と呼ばれる香木をたいて香を楽しむ芸道がある. その中でも, 香りを聞き分ける遊びである組香の一つに源氏香と呼ばれるものがある. これは,

1. まず始めに 5 種類の香木を各 5 包ずつ計 25 包用意する.
2. この 25 包を切り交ぜて, 中から任意の 5 包をとって一つずつ焚き, 香を聞き, これを 5 回繰り返す.
3. 5 回全ての香が終了したあと, 5 つの香りの異同を紙に記す.

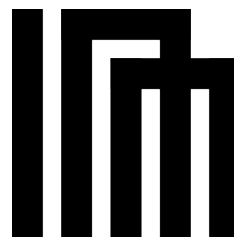


図1 花散里

源氏香の図は縦 5 本の線を基本として構成される. 各線の示す香は, 右から第 1 香, 第 2 香, ..., 第 5 香の順と決まっている. 源氏香において, 5 つの香を聞いた後, 同香だと思ったものの頭を横線でつなぐことで源氏香の図が表現される. 例えば, 1 番目と 3 番目, 2 番目と 4 番目に聞いた香がそれぞれ同じ香りで, これと 5 番目に聞いた香を合わせた 3 種類がそれぞれ独立した香りであるとき, はなぢらさ花散里という右図の香の図が対応する.

それでは, 源氏香で行われる 5 包の異同関係は何通りあるか.

出典: 有名問題

## G 幾何

### G-1

台形  $ABCD$  は  $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$  かつ  $AB = BC = 2AD$  を満たしているとする. 点  $P$  として台形の内部に  $PA = 1, PB = 2, PC = 3$  を満たすように点をとる.  $ABCD$  の面積を求めよ.

出典 : 2017 HKIMO-Pre # 10

### G-2

正四面体の内接球の半径を  $r$ , 外接球の半径を  $R$  とするとき,  $\frac{R}{r}$  の値を求めよ.

出典 : 有名問題

## N 整数論

### N-1

$n$  を正の整数とする.  $3n^3 - 2019$  が 2016 の正の倍数であるとき,  $n$  の取り得る値として最小のものを求めよ.

出典 : 2018 HKIMO-Pre # 14

### N-2

$\frac{7x^{25} - 10}{83}$  が整数となるような最小の自然数  $x$  を求めよ.

出典 : 1993 Final Korean Mathematical Olympiad # 3