



日本フィボナッチ協会 第**18**回研究集会報告書

2020年10月

日本フィボナッチ協会

日本フィボナッチ協会／第 18 回研究集会

日時：2020 年 8 月 21 日

主催：日本フィボナッチ協会

1. 渋川 元樹（神戸大理）：
「周期パラメータについての連分多項式の明示公式」
 2. 片山 真一，古家尚樹，西岡佑基（徳島大学理工）：
「五角 平方三角数について」
 3. 片山 真一，小山 優也（徳島大学理工）：
「**Corner the Knight Game**」
 4. 津野 祐司（長野県飯田 OIDE 長姫高等学校）：
「ペル方程式から得られる数列の生成関数が整数値をとる有理数の必要十分条件 II」
 5. 釜口 悠太（海城高校2年生）：
「**A certain generalization of the Collatz conjecture**」
 6. 久保田 和臣（放送大学教養学部4年 生活と福祉コース）：
「黄金比とフラクタル図形」
 7. 飯高 茂（学習院大学名誉教授），梶田 光（あざみ野第一小学校6年）：
「オイラー 型超完全数について」
 8. 中村 滋（東京海洋大学名誉教授）：
「フィボナッチ数とチェビシエフ多項式」
 9. 中川 幸一（埼玉大学）：
「複素貴金属比と四元数」
 10. 渋川 元樹（神戸大理）：
「三角関数のべき乗の有理値」
 11. 萩原 幸男（元東京大学・元日本大学）：
「逆転フィボナッチ数」
-

フィボナッチ数に関心のある皆様

2020年8月に行われる予定のフィボナッチ研究集会を4月には中止にして、一年間準備をされてきた方も多い中で二つの代替を決めました。

1. 研究集会での発表原稿を基にした冊子の代わりに投稿原稿を全員に配信してコメントを集め参考にして最終稿にする。一部紙媒体として保存。
2. 休憩時間や懇親会での交流時間の代わりにニュースレターを通して近況報告を配信する。

ニュースレターは2020年9月7日に配信済み。頂いた原稿は一部修正がありました。昨年も同様全員に配信し一部は紙媒体として保存。原稿の締め切りは8月21日でしたが、冊子発行日は少しずれ10月になりました。報告集は対面を前提としたもので、コロナ禍では大きく変わりましたが、冊子のタイトルは継続性を考え『第18回日本フィボナッチ研究集会報告』としました。

今まで大変な時期もありましたが皆様のサポートで乗り越えてきました。来年の状況は全く分かりませんが、収束の兆しが見えれば1月から3月に日程調整、4月に会場と懇親会会場の申し込みを予定しています。

日本フィボナッチ協会代表 大関 清太

周期パラメータについての連分多項式の明示公式*

渋川元樹[†] (神戸大理)

講演動画 : <https://www.youtube.com/watch?v=iKBj9vFrI5w>

概要

第18回日本フィボナッチ協会研究会で発表した l 周期の連分多項式の明示公式について述べる.

1 Introduction

無限数列 $\mathbf{a} := (a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{b} := (b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{c} := (c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ に対し,

$$\mathbf{a}_p := (a_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq p}}, \quad \mathbf{b}_p := (b_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq p}}, \quad \mathbf{c}_p := (c_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq p}}$$

とし

$$\boldsymbol{\alpha}_p := (\mathbf{a}_p, \mathbf{b}_p, \mathbf{c}_p)$$

とおく. $n \times n$ の三重対角行列を

$$T_n(\boldsymbol{\alpha}_p) = \begin{pmatrix} a_p & b_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_p & a_{p+1} & b_{p+1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{p+n-2} & b_{p+n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{p+n-2} & a_{p+n-1} \end{pmatrix}$$

とし, 連分多項式 (continuant polynomials) を

$$K_{-1}(\boldsymbol{\alpha}_p) := 0, \quad K_0(\boldsymbol{\alpha}_p) := 1, \quad K_n(\boldsymbol{\alpha}_p) := \det T_n(\boldsymbol{\alpha}_p)$$

で定める.

連分多項式については, 連分数や直交関数系等と関連して古くから多くの研究がなされてきている [T]. 明示公式に関しても, Euler 以来良く知られているが, Rozsa (Linear Algebra Appl. 2, 1969) はパラメータに l 周期性

$$a_{p+l} = a_p, \quad b_{p+l} = b_p, \quad c_{p+l} = c_p, \quad (p \in \mathbb{Z})$$

を課すと, 第2種 Chebyshev 多項式を用いて比較的綺麗に書けることを示した. この別証明について報告したい.

*本研究は科研費 (課題番号 : 18J00233) の助成を受けたものである.

[†]g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

2 Preliminaries

主結果の証明に必要ないくつかの事実を list する. まず Gauss の超幾何関数

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right) := \sum_{m \geq 0} \frac{(a)_m (b)_m}{m! (c)_m} x^m, \quad (a)_m := \begin{cases} a(a+1) \cdots (a+m-1) & (m \neq 0) \\ 1 & (m = 0) \end{cases}$$

を用いて第 2 種 Chebyshev 多項式を

$$U_n(x) := (n+1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+1)_{k+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k,$$

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & (k \neq 0) \\ 1 & (k = 0) \end{cases}$$

によって定義する. これは \sin の n 倍角多項式

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = U_n(\cos \theta)$$

が成り立ち, 特にその母関数

$$\frac{1}{1-2xu+u^2} = \sum_{n \geq 0} U_n(x)u^n \quad (1)$$

が知られている.

他方, 2 変数 n 次の完全斉次対称多項式 $h_n(x, y)$ を

$$h_n(x, y) := \sum_{i+j=n} x^i y^j = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

で定める. よく知られているように $h_n(x, y)$ の母関数は

$$\frac{1}{(1-xu)(1-yu)} = \sum_{n \geq 0} h_n(x, y)u^n \quad (2)$$

である. (1) と (2) を比較して次を得る.

$$h_n(x, y) = \begin{cases} (xy)^{\frac{n}{2}} U_n \left(\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \right) & (xy \neq 0) \\ (x+y)^n & (xy = 0) \end{cases}. \quad (3)$$

2×2 行列のベキ乗は $U_n(x)$ を用いて書くことができる.

Lemma 1. 複素数成分の 2×2 行列

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と任意の非負整数 m について

$$A^m = h_{m-1}(\rho_+, \rho_-)A - h_{m-2}(\rho_+, \rho_-)(\det A)E_2$$

$$= \begin{cases} (\det A)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2\sqrt{\det A}} \right) A - (\det A)^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2\sqrt{\det A}} \right) E_2 & (\det A \neq 0) \\ (\operatorname{tr} A)^{m-1} A & (\det A = 0) \end{cases}. \quad (4)$$

が成り立つ。ただし、 ρ_{\pm} は行列 A の特性根である。

Proof. 多項式 λ^m を行列 A の特性多項式 $\det(\lambda E_2 - A) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A$ で割り算すると

$$\lambda^m = p(\lambda)(\lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A) + c_1 \lambda + c_0.$$

ここで A の特性根 $\rho_+ \neq \rho_-$ を代入して、 c_1, c_0 について解くと

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\rho_+^m - \rho_-^m}{\rho_+ - \rho_-} = h_{m-1}(\rho_+, \rho_-), \\ c_0 &= -\frac{\rho_+^m \rho_- - \rho_+ \rho_-^m}{\rho_+ - \rho_-} = -h_{m-2}(\rho_+, \rho_-) \det A. \end{aligned}$$

$\rho := \rho_+ = \rho_-$ のときは

$$\lambda^m = p(\lambda)(\lambda - \rho)^2 + c_1 \lambda + c_0$$

の両辺を λ で微分した

$$m\lambda^{m-1} = 2p(\lambda)(\lambda - \rho) + c_1$$

で $\lambda = \rho$ とすることで

$$\begin{aligned} c_1 &= m\rho^{m-1} = h_{m-1}(\rho, \rho), \\ c_0 &= -(m-1)\rho^m = -h_{m-2}(\rho, \rho) \det A. \end{aligned}$$

□

Example 2 (四元数の n 乗). a, b, c, d を実数として、次の 2×2 行列 Q の n 乗を考える:

$$\begin{aligned} Q &= Q(a, b, c, d) = aE_2 + bI + cJ + dK = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{-1} & c + d\sqrt{-1} \\ -c + d\sqrt{-1} & a - b\sqrt{-1} \end{pmatrix} \neq O, \\ I &:= \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき

$$\det Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =: |Q|^2, \quad \operatorname{tr} Q = 2a$$

なので、(4) に $A = Q$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} Q^n &= |Q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|Q|} \right) Q - |Q|^n U_{n-2} \left(\frac{a}{|Q|} \right) E_2 \\ &= |Q|^n \left(\frac{a}{|Q|} U_{n-1} \left(\frac{a}{|Q|} \right) - U_{n-2} \left(\frac{a}{|Q|} \right) \right) E_2 \\ &\quad + |Q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|Q|} \right) (bI + cJ + dK) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|Q|^n}{2} \left(U_n \left(\frac{a}{|Q|} \right) - U_{n-2} \left(\frac{a}{|Q|} \right) \right) E_2 \\
&\quad + |Q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|Q|} \right) (bI + cJ + dK) \\
&= |Q|^n T_n \left(\frac{a}{|Q|} \right) E_2 \\
&\quad + |Q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|Q|} \right) (bI + cJ + dK).
\end{aligned}$$

最後の変形は $U_n(x)$ についての積和公式 (Pieri 公式)

$$2xU_n(x) = 2 \cos \theta \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+2)\theta + \sin n\theta}{\sin \theta} = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x)$$

と

$$\frac{1}{2}(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \right) = \cos n\theta = T_n(x)$$

を用いた. ただし, $T_n(x)$ は第 1 種 Chebyshev 多項式

$$T_n(x) := {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k, \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

よって $Q^n = Q(a, b, c, d)^n$ の係数を

$$Q(a, b, c, d)^n = A_n(a, b, c, d)E_2 + B_n(a, b, c, d)I + C_n(a, b, c, d)J + D_n(a, b, c, d)K$$

とすると

$$\begin{aligned}
A_n(a, b, c, d) &= \frac{|q|^n}{2} \left(U_n \left(\frac{a}{|q|} \right) - U_{n-2} \left(\frac{a}{|q|} \right) \right) = |q|^n T_n \left(\frac{a}{|q|} \right), \\
B_n(a, b, c, d) &= b|q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|q|} \right), \\
C_n(a, b, c, d) &= c|q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|q|} \right), \\
D_n(a, b, c, d) &= d|q|^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{a}{|q|} \right).
\end{aligned}$$

連分多項式に関しては次のことがわかる.

Lemma 3. (1)

$$K_{-1}(\alpha_p) := 0, \quad K_0(\alpha_p) := 1, \quad K_n(\alpha_p) = a_p K_{n-1}(\alpha_{p+1}) - b_p c_p K_{n-2}(\alpha_{p+2}). \quad (5)$$

(2)

$$L(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_n(\boldsymbol{\alpha}_p) := L(a_p, -b_p c_p) L(a_{p+1}, -b_{p+1} c_{p+1}) \cdots L(a_{p+n-1}, -b_{p+n-1} c_{p+n-1}) \quad (6)$$

とすると

$$A_n(\boldsymbol{\alpha}_p) = \begin{pmatrix} K_n(\boldsymbol{\alpha}_p) & -b_{p+n-1} c_{p+n-1} K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+n-1} c_{p+n-1} K_{n-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

よって特に

$$\text{tr } A_n(\boldsymbol{\alpha}_p) = K_n(\boldsymbol{\alpha}_p) - b_{p+n-1} c_{p+n-1} K_{n-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}), \quad \det A_n(\boldsymbol{\alpha}_p) = \prod_{j=1}^n b_{p+j-1} c_{p+j-1}. \quad (8)$$

(3)

$$\mathbf{k}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) := \begin{pmatrix} K_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix}$$

とすると, $n \geq m$ なる自然数 m について

$$\mathbf{k}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) = A_m(\boldsymbol{\alpha}_p) \mathbf{k}_{n+1-m}(\boldsymbol{\alpha}_{p+m}). \quad (9)$$

(4) 任意の整数 m について

$$c_m = -1$$

とすると

$$a_p + \prod_{i=1}^{n-1} \frac{b_{p+i-1}}{a_{p+i}} = \frac{K_n(\boldsymbol{\alpha}_p)}{K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1})}. \quad (10)$$

ただし,

$$a_p + \prod_{i=1}^{n-1} \frac{b_{p+i-1}}{a_{p+i}} := a_p + \frac{b_p}{a_{p+1} + \frac{b_{p+1}}{a_{p+2} + \frac{b_{p+2}}{\ddots \frac{b_{p+n-2}}{a_{p+n-2} + \frac{b_{p+n-2}}{a_{p+n-1}}}}}}.$$

Proof. (1) $K_n(\boldsymbol{\alpha}_p)$ の定義より直ちに得られる.

(2) $n = 1$ のときはよい. n で成立したとすると, $A_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p)$ と induction の仮定と (5) より

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) &= L(a_p, -b_p c_p) A_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \\ &= \begin{pmatrix} a_p & -b_p c_p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+n} c_{p+n} K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \\ K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+2}) & -b_{p+n} c_{p+n} K_{n-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_p K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) - b_p c_p K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+2}) & -b_{p+n} c_{p+n} (a_p K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) - b_p c_p K_{n-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+2})) \\ K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+n} c_{p+n} K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+n} c_{p+n} K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \\ K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+n} c_{p+n} K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) まず $K_n(\boldsymbol{\alpha}_p)$ の定義と (5) より

$$\mathbf{k}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) = \begin{pmatrix} K_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) - b_p c_p K_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+2}) \\ K_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix} = L(a_p, -b_p c_p) \mathbf{k}_n(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}).$$

よって

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}_p) &= L(a_p, -b_p c_p) L(a_{p+1}, -b_{p+1} c_{p+1}) \cdots L(a_{p+m-1}, -b_{p+m-1} c_{p+m-1}) \mathbf{k}_{n+1-m}(\boldsymbol{\alpha}_{p+m}) \\ &= A_m(\boldsymbol{\alpha}_p) \mathbf{k}_{n+1-m}(\boldsymbol{\alpha}_{p+m}). \end{aligned}$$

(4) (5) と n についての帰納法より直ちにわかる. □

3 Main results

以下, 数列 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に l 周期性

$$a_{p+l} = a_p, \quad b_{p+l} = b_p, \quad c_{p+l} = c_p, \quad (p \in \mathbb{Z})$$

を課す. これより特に

$$\boldsymbol{\alpha}_{p+l} = \boldsymbol{\alpha}_p \tag{11}$$

が成り立つ.

Theorem 4.

$$\begin{aligned} K_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) &= \begin{cases} (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{\text{tr } A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ -(\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{\text{tr } A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \neq 0), \\ (\text{tr } A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{m-1} K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = 0) \end{cases} \\ K_{l(m-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) &= \begin{cases} (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{\text{tr } A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \neq 0) \\ (\text{tr } A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{m-1} K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = 0) \end{cases}. \end{aligned} \tag{12}$$

Proof. まず (9) と周期性 (11) より

$$\mathbf{k}_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) = A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \mathbf{k}_{l(m-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{p+l}) = A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \mathbf{k}_{l(m-1)}(\boldsymbol{\alpha}_p)$$

が成り立つことに注意する. これより

$$\mathbf{k}_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) = A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)^m \mathbf{k}_0(\boldsymbol{\alpha}_p) = A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで (4) より

$$\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = \prod_{j=1}^l b_{p+j-1} c_{p+j-1} \neq 0$$

のときは

$$\begin{aligned} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)^m &= (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ &\quad - (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) E_2, \end{aligned}$$

$\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = 0$ のときには

$$A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)^m = (\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{m-1} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p).$$

これらと (7)

$$A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = \begin{pmatrix} K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) & -b_{p+l-1}c_{p+l-1}K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p+l-1}c_{p+l-1}K_{l-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) & -b_{p-1}c_{p-1}K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) & -b_{p-1}c_{p-1}K_{l-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix}$$

を併せると $\mathbf{k}_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p)$ において成分比較をすることで結論を得る. \square

この定理の系として次の主結果を得る.

Corollary 5. $j = -1, 0, 1, \dots, l-2$ に対し

$$\begin{aligned} &K_{lm+j}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j}) \\ &= K_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) - b_{p-1}c_{p-1}K_{j-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_{lm-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \\ &= \begin{cases} (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) \\ \quad \cdot (K_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) - b_{p-1}c_{p-1}K_{j-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1})) \\ - (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}{2\sqrt{\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p)}} \right) K_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j}) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) \neq 0) \cdot \\ (\operatorname{tr} A_l(\boldsymbol{\alpha}_p))^{m-1} \\ \quad \cdot (K_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_l(\boldsymbol{\alpha}_p) - b_{p-1}c_{p-1}K_{j-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})K_{l-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1})) & (\det A_l(\boldsymbol{\alpha}_p) = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,

$$-b_{p-1}c_{p-1}K_{-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) := K_0(\boldsymbol{\alpha}_{p-1}) = 1$$

とする.

Proof. まず (9) と (7) より

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{lm+j}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j}) &= A_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j})\mathbf{k}_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ &= \begin{pmatrix} K_j(\boldsymbol{\alpha}_{p-j}) & -b_{p-1}c_{p-1}K_{j-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j}) \\ K_{j-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j+1}) & -b_{p-1}c_{p-1}K_{j-2}(\boldsymbol{\alpha}_{p-j+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{lm}(\boldsymbol{\alpha}_p) \\ K_{lm-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで成分比較して (12) を用いることで結論を得る. \square

Remark 6. Theorem 4 と Corollary 5 は Rozsa (Linear Algebra Appl. 2, 1969) によって示された. Rozsa の証明は continuants の行列式を直接変形していくもののだが, 我々の証明は 2×2 行列の議論だけで話が済んでいる分, より simple な証明になっていると思われる.

4 Examples

以下, $l = 1, 2, 3$ の場合に (13) を具体的に書き下す.

4.1 $l = 1$

$l = 1$ ㄝえ,

$$a := a_p = a_{p+1}, \quad b := b_p = b_{p+1}, \quad c := c_p = c_{p+1}$$

とおく. この場合は (8) より

$$\operatorname{tr} A_1(\boldsymbol{\alpha}_p) = a, \quad \det A_1(\boldsymbol{\alpha}_p) = bc.$$

よって (13) はよく知られているように以下のようになる.

$$K_m(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) = \begin{cases} (bc)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a}{2\sqrt{bc}} \right) & (bc \neq 0) \\ a^{m-1} & (bc = 0) \end{cases}. \quad (14)$$

4.2 $l = 2$

$l = 2$ ㄝえ,

$$\begin{aligned} a_1 &:= a_{2m+1} = a_{2m+3}, & b_1 &:= b_{2m+1} = b_{2m+3}, & c_1 &:= c_{2m+1} = c_{2m+3}, \\ a_2 &:= a_{2m} = a_{2m+2}, & b_2 &:= b_{2m} = b_{2m+2}, & c_2 &:= c_{2m} = c_{2m+2} \end{aligned}$$

とおく. この場合は (8) より

$$\operatorname{tr} A_2(\boldsymbol{\alpha}_p) = a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2, \quad \det A_1(\boldsymbol{\alpha}_p) = b_1 c_1 b_2 c_2.$$

よって (13) は以下のようになる.

$$\begin{aligned} K_{2m}(\boldsymbol{\alpha}_p) &= \begin{cases} (b_1 c_1 b_2 c_2)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2}} \right) (a_1 a_2 - b_p c_p) \\ - (b_1 c_1 b_2 c_2)^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2}} \right) & (b_1 c_1 b_2 c_2 \neq 0), \\ (a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2)^{m-1} (a_1 a_2 - b_p c_p) & (b_1 c_1 b_2 c_2 = 0) \end{cases} \\ K_{2m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) &= \begin{cases} (b_1 c_1 b_2 c_2)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2}} \right) a_{p+1} & (b_1 c_1 b_2 c_2 \neq 0) \\ (a_1 a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2)^{m-1} a_{p+1} & (b_1 c_1 b_2 c_2 = 0) \end{cases}. \end{aligned} \quad (15)$$

Example 7 (A q -analogue of Fibonacci numbers). Morier-Genoud と Ovsienko [MGO] は有理 knot の Jones 多項式や cluster 代数の F 多項式との関連から正の有理数 $\frac{r}{s}$ の (正則) 連分数展開

$$\frac{r}{s} = a_1 + \mathop{\text{K}}_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{a_{i+1}}, \quad a_1, \dots, a_{2n} > 0$$

の次のような q 類似を考えた:

$$\left[\begin{array}{c} r \\ s \end{array} \right]_q := [a_1]_q + \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{q^{(-1)^{i-1}a_i}}{[a_{i+1}]_{q^{(-1)^i}}}.$$

ただし $q \neq 0$ は複素パラメータで

$$[a]_q := \frac{1 - q^a}{1 - q}.$$

我々の公式はこの q 類似の具体例を書き下すのに役に立つ. たとえば正の整数 a について

$$a_p = [a]_{q^{(-1)^{p-1}}}, \quad b_p = q^{(-1)^{p-1}a}, \quad c_p = -1 \quad (16)$$

とし, この (16) を (15) に代入すると

$$\begin{aligned} K_{2m}(\boldsymbol{\alpha}_p) &= U_{m-1} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right) ([a]_q [a]_{q^{-1}} + q^{(-1)^{p-1}a}) \\ &\quad - U_{m-2} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right), \\ K_{2m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) &= U_{m-1} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right) [a]_{q^{(-1)^p}}. \end{aligned} \quad (17)$$

更に (10) から

$$\begin{aligned} &[a]_q + \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{q^{(-1)^{i-1}a}}{[a]_{q^{(-1)^i}}} \\ &= \frac{U_{m-1} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right) ([a]_q [a]_{q^{-1}} + q^{(-1)^{p-1}a}) - U_{m-2} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right)}{U_{m-1} \left(\frac{[a]_q [a]_{q^{-1}} + q^a + q^{-a}}{2} \right) [a]_{q^{(-1)^p}}}. \end{aligned} \quad (18)$$

特に

$$a_1 = a_2 = 1, \quad b_i = q^{(-1)^{i-1}}, \quad c_1 = c_2 = -1.$$

として

$$F_{2m}(q) := K_{2m-1}(\boldsymbol{\alpha}_2), \quad F_{2m+1}(q) := K_{2m}(\boldsymbol{\alpha}_1)$$

とする. これは Fibonacci 数

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

の比の連分数展開

$$\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = 1 + \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{1},$$

の q 類似

$$\left[\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right]_q = 1 + \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{q^{(-1)^{i-1}}}{1},$$

の分母及び分子になる. 実際, Lemma 3 (4) より

$$\left[\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right]_q = \frac{F_{2n+1}(q)}{F_{2n}(q)}.$$

また初期値

$$F_1(q) = 1, \quad F_2(q) = 1, \quad F_3(q) = 1 + q$$

及び連立の漸化式

$$F_{2m}(q) = F_{2m-1}(q) + q^{-1}F_{2m-2}(q), \quad F_{2m+1}(q) = F_{2m}(q) + qF_{2m-1}(q)$$

を満たすので, そういう意味でも Fibonacci 数の q 類似とみなせる. これは (17) で $a = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} F_{2m+1}(q) &= U_{m-1} \left(\frac{1+q+q^{-1}}{2} \right) (1+q) - U_{m-2} \left(\frac{1+q+q^{-1}}{2} \right) \\ F_{2m}(q) &= U_{m-1} \left(\frac{1+q+q^{-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

と表示できることがわかる. 今回の研究の元々の動機はこういった周期連分数をもつ有理数の q 類似の明示公式の導出であり, その一般化として (13) を得たのであった.

4.3 $l = 3$

$l = 3$ ゆえ,

$$\begin{aligned} a_1 &:= a_{3m+1} = a_{3m+4}, & b_1 &:= b_{3m+1} = b_{3m+4}, & c_1 &:= c_{3m+1} = c_{3m+4}, \\ a_2 &:= a_{3m+2} = a_{3m+5}, & b_2 &:= b_{3m+2} = b_{3m+5}, & c_2 &:= c_{3m+2} = c_{3m+5}, \\ a_3 &:= a_{3m} = a_{3m+3}, & b_3 &:= b_{3m} = b_{3m+3}, & c_3 &:= c_{3m} = c_{3m+3} \end{aligned}$$

とおく. この場合は (8) より

$$\operatorname{tr} A_3(\boldsymbol{\alpha}_p) = a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1, \quad \det A_1(\boldsymbol{\alpha}_p) = \prod_{j=1}^3 b_j c_j.$$

よって (13) は以下のようになる.

$$\begin{aligned} &K_{3m+1}(\boldsymbol{\alpha}_{p-1}) \\ &= a_{p-1} K_{3m}(\boldsymbol{\alpha}_p) - b_{p-1} c_{p-1} K_{3m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}) \\ &= \begin{cases} \left(\prod_{j=1}^3 (b_j c_j)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3}} \right) \right. \\ \quad \cdot (a_{p-1} (a_1 a_2 a_3 - a_{p+2} b_p c_p - a_p b_{p+1} c_{p+1}) \\ \quad \quad - b_{p-1} c_{p-1} (a_{p+1} a_{p+2} - b_{p+1} c_{p+1})) \\ \quad \left. - \prod_{j=1}^3 (b_j c_j)^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3}} \right) a_{p-1} \right) a_{p-1} & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j \neq 0), \\ (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1)^{m-1} \\ \quad \cdot (a_{p-1} (a_1 a_2 a_3 - a_{p+2} b_p c_p - a_p b_{p+1} c_{p+1}) \\ \quad \quad - b_{p-1} c_{p-1} (a_{p+1} a_{p+2} - b_{p+1} c_{p+1})) & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{3m}(\alpha_p) \\
&= \begin{cases} \prod_{j=1}^3 (b_j c_j)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3}} \right) \\ \quad \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_{p+2} b_p c_p - a_p b_{p+1} c_{p+1}) \\ - \prod_{j=1}^3 (b_j c_j)^{\frac{m}{2}} U_{m-2} \left(\frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3}} \right) & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j \neq 0), \\ (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1)^{m-1} \\ \quad \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_{p+2} b_p c_p - a_p b_{p+1} c_{p+1}) & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j = 0) \end{cases} \\
& K_{3m-1}(\alpha_{p+1}) \\
&= \begin{cases} \prod_{j=1}^3 (b_j c_j)^{\frac{m-1}{2}} U_{m-1} \left(\frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1}{2\sqrt{b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3}} \right) \\ \quad \cdot (a_{p+1} a_{p+2} - b_{p+1} c_{p+1}) & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j \neq 0) \\ (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_3 c_3 - a_3 b_1 c_1)^{m-1} \\ \quad \cdot (a_{p+1} a_{p+2} - b_{p+1} c_{p+1}) & (\prod_{j=1}^3 b_j c_j = 0) \end{cases} .
\end{aligned} \tag{19}$$

参考文献

- [MGO] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko: *q-deformed rationals and q-continued fractions*, arXiv1812.00170, pp39.
- [R] P. Rozsa: *On periodic continuants*, Linear Algebra Appl. 2 (1969), 267–274.
- [T] M. Thomas: *A treatise on the theory of determinants*, Dover, 1960.

五角 平方三角数について

片山 真一, 古家尚樹, 西岡佑基 徳島大学理工

第 18 回フィボナッチ研究集会 (2020 年 8 月 21 日)

1 平方三角数

本年度の卒業研究 (古家, 西岡を含む) では, ペル方程式を計算例から説明する資料として J. H. Silverman 『はじめての数論』の 28 章と 29 章を用いた。28 章は, ペル方程式の導入として平方三角数の問題を取り上げている。続く第 29 章は, 一般のペル方程式の整数解の構造の説明に充てられている。その 29 章の章末の練習問題の 29.4(c) として「五角数である平方三角数は無限に存在するか」という問題が掲載されている。当初我々は, この問題は連立ペル方程式を解く問題に帰着するので, 結果は良く知られたものだと考えていた。しかし調べてみると, 現時点では, その状況の認識が人によって異なることが明らかになってきた。まず演習問題として出題した Silverman は, 本を書いた時点で解と解法を知っていたと思われる。しかし Wolfram Mathworld の記事では, ある時点までは未解決な問題であったとしている。さらに現時点では一つの解法が明記されているものの, 解法を明記した文献は無いとしている。また E. Deza は, その著書『Figurate Numbers』の 1 章でこの問題に触れており, まだ未解決の問題であり解法の書かれた文献は無いとしている。

歴史的には, 最初に平方三角数の問題を扱ったのは Euler (オイラー) である。実際 L. E. Dickson (ディクソン) の『History of the Theory of Numbers』第 2 巻¹の第 1 章 Polygonal, Pyramidal, and Figurate Numbers に, 下記のような記述がある。

「平方数である三角数および平方数である五角数の決定は, オイラーが『Algebra』(1774) で最初に扱った。」

平方三角数の決定も五角平方数の決定もペル方程式²に帰着する。

ここで Polygonal Number (多角数) の定義を思い出しておこう。 n 番目の k 角数 $P_k(n)$ は, 一辺の上に n 個の点を配置して全体として正 k 角形の形に点を配置した場合の点の総数のことであり,

$$P_k(n) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$

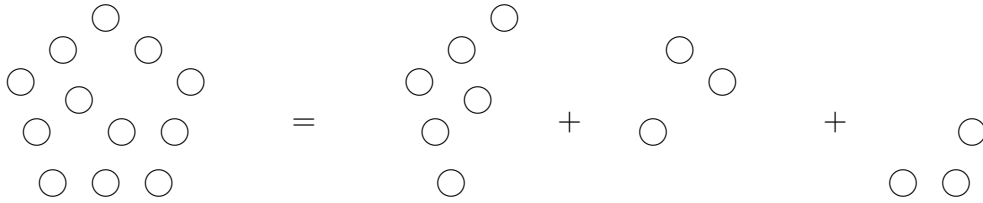
と表すことができる。

¹注意: ディクソンの本は, 出版された 1920 年頃までの整数論に関する結果を網羅的に記述する本であって, 1,2,3 の 3 巻から成る。第 2 巻は, 不定方程式に関する結果をまとめている。

²注意: このペル方程式という呼称は, オイラーが誤解に基づいて名づけた事が知られている。

解説) その証明の一つを思い出しておこう。1つの頂点を固定しそこから他の頂点に対角線を引くと正 k 角形は $k-2$ 個の三角形に分かれる。このとき $k-3$ 本の対角線上の点を重なりが無いように分ける。このとき1つの辺に n 個の点のある三角形1個と、頂点をだぶらせないように一つの辺の上に $n-1$ 個の点ある小さな三角形が全部で $k-3$ 個、下の図のように分けることができる。

この図は $P_5(3) = P_3(3) + P_3(2) + P_3(2)$ を表す。



$$\text{従って } P_k(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(k-3)n(n-1)}{2} = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} \quad \text{QED}$$

Dickson のテキストでは以下の場合が列挙されている。

平方三角数の場合

$$P_3(m) = \frac{m(m+1)}{2} = y^2 \iff (2m+1)^2 - 8y^2 = 1$$

すなわちペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ の $D = 2$ で $x \equiv 1 \pmod{2}$ (従って $y \equiv 0 \pmod{2}$) となる正整数解を求める問題と同値になる。On-line Encyclopedia of Integer Sequences(以下 OEIS と略す) では, A001110 $\{1, 36, 1225, 41616, 1413721, \dots\}$ として記載されている。

五角平方数の場合

$$P_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2} = y^2 \iff (6n-1)^2 - 6(2y)^2 = 1$$

すなわちペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ で $D = 6$ でさらに $x \equiv -1 \pmod{6}$ (従って $y \equiv 0 \pmod{2}$) となる正整数解を求める問題と同値である。OEIS では, A036353 $\{1, 960400, 94109401, 903638458801, 8676736387298001 \dots\}$ と記載されている。

最後に五角三角数の場合は,

$$\begin{aligned} P_3(m) = P_5(n) &\iff \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \\ &\iff (6n-1)^2 - 3(2m+1)^2 = -2 \end{aligned}$$

すなわちペル型方程式 (ノルム方程式ともいう) $x^2 - Dy^2 = N$ で $D = 3, N = -2$ の場合で, 特に $x \equiv -1 \pmod{6}$ (従って $y \equiv 1 \pmod{2}$) という合同関係をみ

たす正整数解を求める問題と同値になる。OEIS では、A014979 として次のように $\{1, 210, 40755, 7906276, 1533776805 \dots\}$ と記載されている。

ペル方程式 $x^2 - 8y^2 = 1$ の正整数解 x, y は、

$$\begin{cases} x = \frac{(3 + \sqrt{8})^k + (3 - \sqrt{8})^k}{2} \\ y = \frac{(3 + \sqrt{8})^k - (3 - \sqrt{8})^k}{2\sqrt{8}} \end{cases}$$

(k は非負整数) として得られる。ここで一般にペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ の正整数解は、 \sqrt{D} の連分数展開で求められる最小正整数解 x_0, y_0 を使って次式のように一般化される。 D が平方数でない正整数であるときにペル方程式

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

の最小正整数解を x_0, y_0 とすると、ペル方程式の正整数解 x, y は

$$\begin{cases} x = \frac{(x_0 + y_0\sqrt{D})^k + (x_0 - y_0\sqrt{D})^k}{2} \\ y = \frac{(x_0 + y_0\sqrt{D})^k - (x_0 - y_0\sqrt{D})^k}{2\sqrt{D}} \end{cases}$$

(k は非負整数) として得られる。

2 五角平方三角数

五角数でありかつ平方三角数であるような数は、実際に 1 しかないことは、専門家の間では知られている事実であると思われる。しかしその手順まで明確に書き下した文献は目にしていない。序文で述べたように明示的に書き下した文献が無いまま放置されていることが、この問題に関して認識がまちまちの原因だと思われる。そこで今回は、それに一つの終止符を打つべくいくつかの証明を比較しながら書き下すことを目的とする。以下の証明を見ていただければ、それらの証明は素直なものであることが了解してもらえらると思う。

2.1 第 1 の手法:Baker 理論

Wolfram Mathworld で検索すると、Pentagonal Square Triangular Number の項目があり、次のように書かれている。

$$P_3(m) = y^2 = P_5(n) \iff (2m + 1)^2 - 8y^2 = 1, (6n - 1)^2 - 24y^2 = 1$$

ここで $X = 6n - 1, Y = 2m + 1, Z = 2y$ とおけば、連立ペル方程式 (Simultaneous Pell Equation)

$$\begin{cases} Y^2 - 2Z^2 = 1, \\ X^2 - 6Z^2 = 1. \end{cases}$$

において、 $X \equiv -1 \pmod{6}, Y \equiv 1 \pmod{2}$ という合同関係をみたすような正整数解 X, Y を求めることと同値である。それに続けて以下の事実は、2003年と2006年に J. Sillcox によって指摘されたがその後も論文などの形では発表されていないとの記述がある。

すなわち問題が、W. S. Anglin, Simultaneous Pell equations, Math. Comp. **65** (1996), 355–359 の連立ペル方程式に関する $X^2 - RZ^2 = 1, Y^2 - SZ^2 = 1$ の整数解の決定結果 (Anglin は $0 < R < S \leq 200$ の範囲の全ての場合の整数解を決定) に帰着させることができることが指摘されている。実際 $R = 2, S = 6$ の場合として正整数解は $X = 5, Y = 3, Z = 2$ ただ一つであり、これは五角平方三角数が $P_3(1) = P_4(1) = P_5(1) = 1$ 唯一つであることと同値である。このネットでの記述で本質的には、解法の一つの筋道が明示されていることになる。

注意 1) Anglin の手法は、Diophantus 近似に関する Baker 理論の linear forms in logarithm の結果を使っている。なお彼のテキスト「The Queen of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 1995」の 4 章の 4.6 Simultaneous Fermat Equation でもその手法が詳述してある。また片山の昔の論文「Several Methods for solving simultaneous Fermat-Pell equations,」(J. Math. Tokushima Univ., **33**) (1999) のセクション 1 でも類似した連立ペル方程式の例題を解く Anglin の手法の解説がある。

注意 2) 一方でこの問題は、未解決の問題であるという立場の人もいることが分かるのが次の文献である。E. Deza, Figurate Numbers, World Scientific, 2012 の第 1 章 1.4.3. では、五角平方三角数を決定した文献は無く未解決な問題であり、 10^{22166} 以下には解が無いという記述がある。少なくともこの本の著者 E. Deza は、解を決定する手順は未だ知られていないという認識を持っている事が分かる。

注意 3) 連立ペル方程式を解く手法として、片山は、上で挙げた論文で、Anglin の手法だけでなく、Rickert の方法、楕円曲線の整数点の決定問題、2 次の Binary recurrence sequences の性質を用いる 4 つの異なる手法を紹介している。以下で述べるようにこの問題に Binary recurrence の性質を用いる手法を適用すると、Ljunggren の 1936 年の結果に帰着する事が分かり比較的簡単に解が決定できる事が分かる。なお Ljunggren の結果は、Mordell の本『Diophantine Equations』の p 270 で定理 9 として省略した形で掲載されている。

以下では、上で触れた Anglin の結果に帰着させる方法以外に次の 2 つの解法を紹介することにしよう。まず第 2 の手法としては、連立ペル方程式の解を 2 次の Binary recurrence sequences 中の平方数の決定問題に帰着させる。それをさらに、Ljunggren による 4 次体の単数の構造に帰着させる方法である。

第 3 の手法は、楕円曲線の整数点の決定問題と考えて解く手法である。Silverman が 29 章の章末問題として取り上げたのは、テキスト後半に扱う楕円曲線の有理点の加法構造への伏線の一つとも考えられる。

2.2 第2の手法 : Binary recurrence sequences 中の平方数の決定問題

Binary recurrence sequence 中の平方数の決定には, Ljunggren の手法や, JHE. Cohn の初等的なアプローチや奇数パラメーターの場合の Ribenboim-McDaniel の結果など多くの結果があるが, 以下で述べるのは, 初等的な考察を経て Ljunggren の結果に帰着させる片山の論文のセクション 4 の手法である。この手法は初等的であり, 下記のようにこの問題には幸運にも適用できるが, どのような連立ペル方程式の問題も一般的に扱えるわけではないことには注意しておく。まず五角平方三角数の問題 $P_3(m) = y^2 = P_5(n)$ で $X = 6n - 1, Y = 2m + 1, Z = 2y$ とおけば次の連立ペル方程式の問題と捉えることができる。

$$\begin{cases} X^2 - 3Y^2 = -2 \\ Y^2 - 2Z^2 = 1 \end{cases}$$

Binary recurrence sequence a_k, b_k を $a_0 = 1, a_1 = 2, b_0 = 0, b_1 = 1$ および漸化式

$$a_{k+1} = 4a_k - a_{k-1}, b_{k+1} = 4b_k - b_{k-1}$$

で定める。このとき $\{(a_k, b_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ はペル方程式 $x^2 - 3y^2 = 1$ の正整数解 (x, y) 全体である。2 は 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ で分岐するので $X^2 - 3Y^2 = -2$ の正整数解 (X, Y) は $X + Y\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(a_k + b_k\sqrt{3})$ すなわち

$$X = a_k + 3b_k, Y = a_k + b_k$$

で与えられる。ここで $a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{3} = (a_k + b_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ より $a_{k+1} = 2a_k + 3b_k, b_{k+1} = a_k + 2b_k$ をみたすことに注意しておく。従って

$$Y^2 - 1 = (a_k + b_k)^2 - 1 = a_k^2 - 1 + b_k^2 + 2a_k b_k = 4b_k^2 + 2a_k b_k = 2b_k b_{k+1}$$

が成立するので

$$2Z^2 = Y^2 - 1 = 2b_k b_{k+1}$$

b_k, b_{k+1} は互いに素なので $b_k = \square, b_{k+1} = \square$ と同時に平方数であることが分かる。ここで Ljunggren の 1936 年の *Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und reinbiquadratischer Zahlkörper*, Oslo Vid. Akad. Strifter, 1 (1036), No 12. の古典的な結果を引用する。

定理 1 (Ljunggren) D を平方数でない正整数とする。不定方程式 $x^2 - Dy^4 = 1$ は高々 2 つの正整数解をもつ。また 2 つの整数解を持つ場合は, 2 個の例外 $D = 1785, 28560$ を除けば, 次をみたす。

実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の 1 基本単数を $\varepsilon_D (> 1)$ とおけば $x + y\sqrt{D} = \varepsilon_D, \varepsilon_D^2$ である。例外の $D \in \{1785, 28560\}$ の場合は, $x + y\sqrt{D} = \varepsilon_D, \varepsilon_D^4$ をみたす。

我々の場合は, b_n, b_{n+1} が平方なので, $x^2 - 3y^4 = 1$ が 2 個の正整数解を持つことになる。上の定理を適用して $\varepsilon_3 = 2 + \sqrt{3}, \varepsilon_3^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ 。 $b_k = b_1 = 1, b_{k+1} = b_2 = 2$ となるので $Y = a_1 + b_1 = 3$ 。すなわち $X = 5, Z = 2$, i.e., $P_3(m) = P_5(n)$ が平方数となるのは $m = n = 1$ の自明な場合に限られることが確かめられた。

2.3 第3の手法：楕円曲線の整数点の決定問題

ここでは、Silverman の手持ち資料にあると思われる解法を再現してみよう。

$$\begin{cases} Y^2 - 2Z^2 = 1, \\ X^2 - 6Z^2 = 1. \end{cases}$$

の左辺同士，右辺同士を掛け合わせて

$$(YZ)^2 = (2Z^2 + 1)(6Z^2 + 1)$$

さらに両辺に $(12Z)^2$ をかけると

$$(12XYZ)^2 = (12Z^2)(12Z^2 + 6)(12Z^2 + 2)$$

ここで $y = 12XYZ, x = 12Z^2 + 3$ とすることにより，下記の Cremona の楕円曲線 $192A2(R)$ の整数点の決定問題に帰着する。

$$E : y^2 = x^3 - x^2 - 9x + 9$$

E の有理点の群構造は $E(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}$ である。 \mathbb{Z} の生成元として，点 $P_1 = (0, 3)$ がとれ，位数有限の部分は，位数 2 の点 $P_2 = (3, 0), P_3 = (1, 0)$ で生成される。 P を E の有理点とすると $P = n_1P_1 + n_2P_2 + n_3P_3$ とあらわされる。特に E がランク 1 の楕円曲線なので，J. Gebel, A. Pethő, H.G. Zimmer の Computing integral points on elliptic curves, Acta Arith., 68 (1994), 171-192 の手法が使える。すなわち P が整数点である場合の高さ (height) が有界なので， n_1 が有界 (注意： n_2, n_3 は 0, 1 のいずれか) となる。その有限個の有理点を実際に計算すると以下のように E の整数点が全部で 13 点になることが分かる。

$$\begin{aligned} & (3, 0), (1, 0), (-3, 0), \\ & \pm P_1 = (0, \pm 3), \\ & \pm(P_1 + (3, 0)) = (-1, \mp 4), \\ & \pm(P_1 + (1, 0)) = (9, \pm 24), \\ & \pm(P_1 + (-3, 0)) = (-5, \mp 8), \\ & \pm(2P_1 + (3, 0)) = (51, \mp 360) \end{aligned}$$

$y = 12XYZ, x = 12Z^2 + 3$ より $X = 5, Y = 3, Z = 2$ すなわち $P_3(m) = P_5(n)$ が同時に平方数となるのは $m = n = 1$ の時に限ることが分かる。

注意) 詳細が必要なら，片山の 199 年の論文のセクション 3 で，別の連立ペル方程式を解くために，まさにこの曲線 $y^2 = x^3 - x^2 - 9x + 9$ の整数点を決定する過程を詳述しているので参照のこと。

以上のように 3 通りの手法いずれを経由しても次の事実が確認できる。

定理 2 五角平方三角数は，自明な $1 (= P_3(1) = 1^2 = P_5(1))$ の場合を除けば存在しない。

2.4 連立ペル方程式の現在

最後に連立ペル方程式の正整数解の総数に関する現状について述べておこう。M. A. Bennett が 1998 年に連立ペル方程式の正整数解の個数が高々 3 個であることを示したことが現在の研究の活性化の端緒となった。その後多くの研究者の努力により次々この結果は改良されてきたが、2006 年になってやはり Bennett 自身によって次の（個数が 2 になる (R, S) の無限系列が存在しこれ以上個数が小さくなることは無いという意味で最良の）結果が得られている。

定理 3 (Bennett, Cipu, Mignotte, Okazaki) R, S が平方数で無い正整数の場合に $X^2 - RZ^2 = 1, Y^2 - SZ^2 = 1$ の正整数解の個数は、高々 2 である。

2.5 今後の問題

卒業研究のゼミでは、ここでは書いていない多角数でかつ平方三角数であるような他のいくつかの場合も考察しているが、自明な 1 以外の解を持つものは見つかっていない。今の所、2 個以上解をもつのは非常に難しいのではないかという感触を持っている。

参考文献

- [1] W. S. Anglin, *The Queen of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.
- [2] W. S. Anglin, Simultaneous Pell equations, *Math. Comput.*, **65**, No. 213 (1996), 355-359.
- [3] A. Baker and H. Davenport, The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$, *Quat. J. Math. Oxford* 2(2), **20** (1969), 127-137.
- [4] M. A. Bennett, On the number of solutions of simultaneous Pell equations. *J. Reine Angew. Math.*, **498** (1998), 173-199.
- [5] M. A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte and R. Okazaki, On the number of solutions of simultaneous Pell equations II, *Acta Arith.*, **122**, No. 4 (2006), 407-417.
- [6] J. H. E. Cohn, On square Fibonacci numbers, *J. Lond. Math. Soc.*, **39** (1964), 537-540.
- [7] J. H. E. Cohn, The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, II, *Acta Arith.*, **59** (1997), 401-403.
- [8] J. E. Cremona, *Algorithms for Modular Elliptic Curves* (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.
- [9] E. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific Publishing, 2012.

- [10] L. E. Dickson, History of the theory of numbers vol. II, Dover Publications, 1970[1920].
- [11] J. Gebel, A Pethő and H. Zimmer, Computing integral points on elliptic curves, *Acta Arith.*, **68** (1994), 171-192.
- [12] S. Katayama, Several methods for solving simultaneous Fermat-Pell equations, *J. Math. Tokushima Univ.*, **33** (1999), 1-14.
- [13] W. Ljunggren, Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und reinbiquadratischer Zahlkörper, *Oslo Vid. Akad. Strifter*, **1**, No. 12 (1936).
- [14] L. J. Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, London and New York 1969.
- [15] P. Ribenboim and W. L. McDaniel, The squares in Lucas sequences, *J. Number Theory*, **58** (1996), 104-123.
- [16] J. H. Rickert, Simultaneous rational approximations and related diophantine equations, *J. Math. Cambridge Philos. Soc.*, **113** (1993), 461-472.
- [17] J. H. Silverman, Friendly Introduction to Number Theory, Addison Wesley, 2012.
- [18] J. H. シルヴァーマン, はじめての数論 (鈴木治郎 ([17] の日本語訳)), 丸善出版 2014.
- [19] 高木貞治, 初等整数論講義 (第2版), 共立出版 1971.
- [20] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org>(accessed August 11, 2020).
- [21] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.*, **37** (1980), 257-283.
- [22] Wolfram Mathworld, Pentagonal Triangular Number, <https://mathworld.wolfram.com/PentagonalTriangularNumber.html>

Corner the Knight Game

Shin-ichi KATAYAMA and Yuya KOYAMA

第18回フィボナッチ研究会 2020年8月21日

1 Introduction

ワイトホフの石取りゲームは、1907年に W. A. Wythoff が論文 [12] で扱った2人のプレーヤーによる石取りゲームである。ゲームの後手必勝形にフィボナッチ数が現れることで著名である。片山は、プレーヤーが取れる石の数に制限を加えて変形した場合のワイトホフの石取りゲームについて研究を行い、以前のこの研究集会で発表を行った(論文 [3], [4] 参照)。

一方で元々のワイトホフの石取りゲームと同値なゲームとして、無限チェスボード上の Queen を2人のプレーヤーが交互に移動させてどちらが先に左下のコーナーに先に移動できるかを競う「Corner the Queen Game」が知られている。M. Gardner の論文 [2] の序文では、ジョンズホプキンス大の R. P. Isaacs によってワイトホフのゲームとは独立に1960年代に発案されたと記載してある。C. Berge のフランス語のテキストの英訳『The Theory of Graphs and Its Applications』の第6章の中でこの事実が簡単に紹介されているらしい。この無限の大きさのチェスボードの上での Queen の移動というワイトホフの石取りゲームの言い換えは、無限の大きさの将棋盤上の将棋の駒の移動ゲームと言う発想を生み宮寺良平氏、福井正則氏、末續鴻輝氏らの竜王ニムなどの一連の日本での研究が生まれた(論文 [8], [9] 参照)。小山は、将棋ニムについて新たなアイデアを加えた考察を行っており、今後まとめて修士論文 [7] として発表する予定である。

ここでは、Queen Q を Knight N に置き換えた「Corner the Knight Game」問題を考えた結果を記す。Corner the Queen Game に対して誰でもまず考えると思われる自然な問題であるが、不思議なことにこの問題を扱った文献を見つけることはできなかった。少し計算すれば起きている現象はすぐ分かる。しかし石取りゲームで言えば1つの山から2つ石を取り去って他方の山に1つだけ石を加える操作を許したことで、単純な形での帰納法が使えず証明は意外に手間のかかるものになった。ここでは、証明での細かな工夫には言及せず概略のみを紹介することにする。

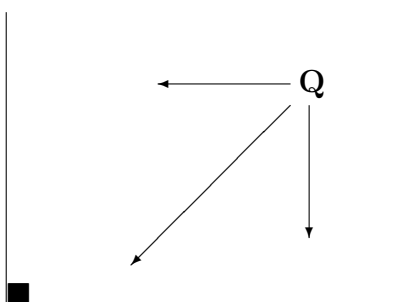
ゲームのルール

1) まず無限のチェスボードのどこかのマス目(位置は座標 (m, n) であらわす)に Knight の駒を一つ置く。

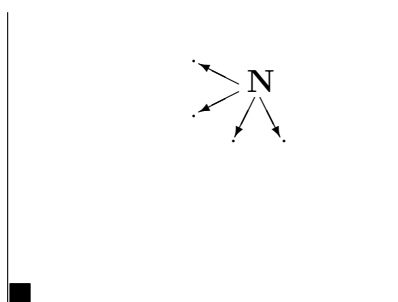
- 2) 2人のプレイヤーは交互に Knight の駒を動かして左下のコーナー (座標では $(0, 0)$) に最初にコマを移動させたプレイヤーを勝者とする。
- 3) Knight の駒が座標 (m, n) の位置にあった場合には, 次の4通りの位置に移動が可能である。

$$(m, n) \rightarrow (m - 2, n - 1), (m - 2, n + 1), (m - 1, n + 2), (m - 1, n - 2)$$

Corner the Queen Game の場合



Corner the Knight Game の場合



注意) この駒の移動の制限から $m, n \leq 1$ の場合は, 移動が不可能になり, 後手必勝形である事が分かる。従ってこの場合のグランディー数 $g_S(m, n)$ は $g_S(m, n) = 0$ である。

このルールに従って最初の方のグランディー数を計算して書き下すと次の通りになる。

表1 小さな m, n でのグランディー数 $g_S(m, n)$

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
11	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	...
10	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	...
9	0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	...
8	0	0	3	3	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	...
7	1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	...
6	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	...
5	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
4	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	...
2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	...
1	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
n/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

2 証明の方針

まず最初に $m \leq 4$ の場合に次の命題が帰納法で証明できる。

命題 1 $m \leq 4$ とする。このとき次のことが成立する。

$$\begin{aligned}
 g_S(m, 0) &= \left[\frac{m}{2} \right] \pmod{2}, \\
 g_S(m, 1) &= \begin{cases} 2 & \text{for the case } m = 2, \\ \left[\frac{m}{2} \right] \pmod{2} & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 g_S(m, 2) &= \begin{cases} 1 & \text{for the case } m = 1, \\ 2 & \text{for the case } m = 2, \\ 3 & \text{for the cases } m \equiv 0 \pmod{4} \text{ and } m \geq 4, \\ 2 & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 g_S(m, 3) &= \begin{cases} 1 & \text{for the case } m = 0, 1, 3, \\ 4 & \text{for the case } m = 4, \\ 2 & \text{for the cases } m \equiv 2 \pmod{4}, \\ 3 & \text{otherwise.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

次に準備として $g_S(m, 2)$ と $g_S(m, 3)$ の周期性を証明する。次に帰納法を $4 \leq m \leq 8$ と $m \geq 8$ の2段階に分けて適応することにより、次の最終的な証明を得た。

定理 2 $g_S(i, j) = g_S(j, i)$ and $g_S(i+4, j+4) = g_S(i, j)$ for any $i, j \geq 0$. より正確には次のことが成立する。

$$\begin{aligned}
 g_S(m, 4n) &= \left[\frac{m}{2} \right] \pmod{2}, \\
 g_S(m, 4n+1) &= \begin{cases} 2 & \text{for the case } m = 4n+2, \\ \left[\frac{m}{2} \right] \pmod{2} & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 g_S(m, 4n+2) &= \begin{cases} 3 & \text{for the case } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2 & \text{otherwise,} \end{cases} \\
 g_S(m, 4n+3) &= \begin{cases} 1 & \text{for the case } m = 4n+3, \\ 4 & \text{for the case } m = 4n+4, \\ 2 & \text{for the case } m \equiv 2 \pmod{4}, \\ 3 & \text{otherwise,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ここで $g_S(i, j)$ は $i \geq j$ に制限しているが、 $g_S(i, j) = g_S(j, i)$ という対称性によりこの制限を行っても一般性を失わない。

最後に $g_S(m+4, n+4) = g_S(m, n)$ が成り立つことから下の表のように幅 4 の L 字型のフック構造が波の伝播の様子に周期的に現れる。理解を助けるために 2 番目の構造に影を付けて見やすくした図を記載して置く。

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
11	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	...
10	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	...
9	0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	...
8	0	0	3	3	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	...
7	1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	...
6	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	...
5	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
4	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	...
2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	...
1	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
n/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

参考文献

- [1] C. L. Bouton, Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, Ann. of Math., **3** (1901–1902), 35–39.
- [2] M. Gardner, Mathematical Games, Scientific American, **236**, No.3 (1977), 134-141.
- [3] S. Katayama and T. Kubo, 取る石に制限を付けた Wythoff の石とりゲーム, 第 15 回フィボナッチ研究集会 2017 August.
- [4] S. Katayama and T. Kubo, 制限付きの Wythoff の二山崩し 2, 第 16 回フィボナッチ研究集会 2018 August.
- [5] S. Katayama and T. Kubo, On Restricted Wythoff's Nim, Journal of Mathematics, Tokushima University **52**, (2018), 53–57.
- [6] S. Katayama and Y. Koyama, On Square and Rectangular Nim Games Nim, to appear in Journal of the Mathematics, Tokushima University **54**, (2020).
- [7] Y. Koyama, 将棋ニムについて, Masters Thesis (徳島大学) 2021.
- [8] R. Miyadera, M. Fukui, T. Inoue, Y. Nakaya and Y. Tokuni, A Variant of Corner the Queen Game, IPSJ Technical Report. 2016-GI-3506.

- [9] R. Miyadera, M. Fukui, Y. Nakaya and Y. Tokuni, A Generalized Ryuoh-Nim:A Variant of the Classical Game of Wythoff Nim, IPSJ Technical Report. 2016-GI-3604.
- [10] F. Sato, On the Mathematics of Extracting Games of Stones-Wonderful Relations between Games and Algebra, Sugaku-Shobou, 2014 (in Japanese).
- [11] K. Suetsugu and M. Fukui, Reseach on a Variant of Wythoff Nim Which Restricts the Moves of Tokens, IPSJ Tecnical Report 2017-GI-3803(in Japanese).
- [12] W. A. Wythoff, A Modification of the Game of Nim, Nieuw Arch, Wisk. **7** (1907), 199–202.

ペル方程式から得られる数列の生成関数が整数値をとる 有理数の必要十分条件 II

津野 祐司 (長野県飯田 OIDE 長姫高等学校)

ABSTRACT. 第 17 回日本フィボナッチ協会研究集会において, 発表者はペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ (d は平方数でない自然数) の整数解から得られる数列の生成関数が整数になる有理数の必要十分条件について考察したが, 本研究ではペル方程式が $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の場合について考察する.

KEY WORDS: Fibonacci numbers, Generating functions, Pell equations.

MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (2010): 11B39.

1. INTRODUCTION

はじめに本研究について述べる前に本研究に関わる先行研究について触れておきたい. まず, D. S. Hong [2] はフィボナッチ数列の生成関数 $F(t)$ とリュカ数列の生成関数 $L(t)$ について

$$\text{もし } t \in \left\{ \frac{F_n}{F_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ なら } F(t) \in \mathbb{Z};$$

$$\text{もし } t \in \left\{ \frac{F_n}{F_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ または } t \in \left\{ \frac{L_n}{L_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ なら } L(t) \in \mathbb{Z}.$$

であることを示し, $F(t)$ と $L(t)$ について整数になる有理数はこれらの場合に限るかという問題を提起した. 彼の問題提起がなければ本研究も存在しなかっただろう. その後, 以下のように P. Pongsriiam [5] がこの問題を完全に解決した.

Theorem 1.1.(Hong, Pongsriiam, 2017) t を有理数とする. リュカ数の生成関数 $L(t)$ について, $L(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{F_n}{F_{n+1}}, -\frac{L_{n+1}}{L_n}, \frac{L_n}{L_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ または } t \in \left\{ -\frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Theorem 1.2.(Hong, Pongsriiam, 2017) t を有理数とする. フィボナッチ数の生成関数 $F(t)$ について, $F(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{F_n}{F_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ または } t \in \left\{ -\frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

ここまでの内容については中村滋氏 [4] による素晴らしい解説があるので, こちらをご覧ください.

u を自然数, v を u の正の約数とし, 数列 $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R_0 = 0, R_1 = 1,$

$$R_{n+2} = uR_{n+1} + vR_n$$

によって定義されるものとする. この数列は一般フィボナッチ数列と呼ばれているものであるが, Pongsriiam とは独立に A. Bulawa と W. K. Lee [1] は

この数列の生成関数 $R(t)$ の収束半径内で Hong が提起した問題を以下のように解決した。

Theorem 1.3.(Bulawa and Lee, 2017) 一般フィボナッチ数列の生成関数を $R(t)$ とする. t を $R(t)$ の収束半径内の有理数とする. このとき $R(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{R_{2n}}{R_{2n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

上の3つの結果は、次に紹介するフィボナッチ数とリュカ数の関係式が重要であった。

Theorem 1.4. ([3, Theorem 5.8.], [7])

(x, y) を非負整数の組とする. もし (x, y) が方程式

$$5x^2 - y^2 = \pm 4,$$

を満たすならば $x = F_n, y = L_n$ となる非負整数 n が存在する. 逆に, 任意の非負整数 n に対して

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}.$$

上のペル方程式

$$5x^2 - y^2 = \pm 4$$

は, 先行研究の議論において重要であったが, 言い換えれば, このペル方程式の整数解から得られる数列の生成関数が整数になる有理数の必要十分条件について考察していたということが言えるだろう. ではこのペル方程式を別のペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ に変えたときと同じような結果が得られるであろうか? この自然な疑問について考察したものが第17回日本フィボナッチ協会研究集会で発表した内容 [8], [9] である.

そして本研究では, ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = \pm 4 \quad (d \text{ は平方数でない自然数}).$$

の場合について考察したい。

また, Bulawa と Lee の研究で扱っている数列は, 我々が扱っている数列よりも再帰的な点では一般的であるが, 一方で初期条件については我々のほうが一般的なものを扱っている。

2. PRELIMINARIES

d を平方数でない自然数とする. はじめに, (a, b) をペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の最小解とする. すなわち, (a, b) は $x^2 - dy^2 = 4$ または $x^2 - dy^2 = -4$ の正整数解であって, $a + b\sqrt{d}$ が最小となるものとする.

ここで, 非負整数 n に対して,

$$X_n = \frac{(a + b\sqrt{d})^n + (a - b\sqrt{d})^n}{2^n} \quad (1)$$

$$Y_n = \frac{(a + b\sqrt{d})^n - (a - b\sqrt{d})^n}{2^n \sqrt{d}} \quad (2)$$

とおく.

このとき, (X_n, Y_n) はペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の解である. 逆に非負整数の組 (x, y) がペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 4$ を満たすならば, ある非負整数 N が存在して, $x = X_N, y = Y_N$ となる. (例えば, [6], p214, Theorem 3.8.)

さらに、

$$\delta = \frac{a^2 - db^2}{4}$$

とおけば、数列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の生成関数は

$$X(t) = \frac{2 - at}{1 - at + \delta t^2}$$

で与えられ、数列 $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の生成関数は

$$Y(t) = \frac{bt}{1 - at + \delta t^2}$$

で与えられる。

このことは、(1), (2) から得られる等式

$$X_{n+2} = aX_{n+1} - \delta X_n \quad (3)$$

$$Y_{n+2} = aY_{n+1} - \delta Y_n \quad (4)$$

から直ちに分かる。

さらに、生成関数 $X(t)$ と $Y(t)$ の収束半径はどちらも

$$\frac{2}{a + b\sqrt{d}}$$

であることも注意しておこう。

また次の等式も (1), (2) から得られる。これらの等式は主結果の証明の際に用いられる。

$$X_{n-1}X_{n+1} - X_n^2 = db^2\delta^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

$$Y_{n-1}Y_{n+1} - Y_n^2 = -b^2\delta^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

$$X_n Y_m = Y_{n+m} - \delta^m Y_{n-m} \quad (n \geq m) \quad (7)$$

$$dY_n Y_m = X_{n+m} - \delta^m X_{n-m} \quad (n \geq m) \quad (8)$$

$$Y_n X_m - X_n Y_m = 2\delta^m Y_{n-m} \quad (n \geq m) \quad (9)$$

$$X_n^2 = X_{2n} + 2\delta \quad (10)$$

$$Y_{2n} = X_n Y_n \quad (11)$$

$$bX_n = Y_{n+1} - \delta Y_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (12)$$

$$bdY_n = X_{n+1} - \delta X_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (13)$$

3. MAIN RESULTS

以下、今回得られた結果を紹介する。それぞれの結果についての証明は、前回 [8], [9] とほぼ同様の初等的な方法で等式 (1) から (12) までを用いてできる。等式たちがそれぞれの役割を果たしながら活躍する様子を楽しんでいただきたい。

Theorem 3.1. t を有理数とする。もし $\delta = 1$ なら、 $X(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \{\pm 1\} \cup \left\{ \frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}, \frac{Y_n}{Y_{n+1}}, \frac{X_n}{X_{n+1}}, \frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}, \frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

もし $\delta = -1$ なら、 $X(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}}, \frac{X_n}{X_{n+1}}, -\frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ -\frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Corollary 3.2. t を $X(t)$ の収束半径内の有理数とする。このとき、もし $\delta = 1$ なら、 $X(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} + Y_1} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

もし $\delta = -1$ なら、 $X(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_{2n}}{Y_{2n+1}}, \frac{X_{2n+1}}{X_{2n+2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

これは、Theorem 3.1 と等式 (1), (2) から得られる。

Remark 3.3. $\delta = 1$ のときはペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ のときの必要十分条件では見られなかった新しい形の必要十分条件となった。これはこれまでの先行研究の中では見かけなかった形である。

Theorem 3.4. $d \geq 5$ と仮定し、 t を有理数とする。 $Y(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \delta \frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Corollary 3.5. $d \geq 5$ と仮定し、 t を $Y(t)$ の収束半径内の有理数とする。このとき、もし $\delta = 1$ なら、 $Y(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

もし $\delta = -1$ なら、 $Y(t) \in \mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は

$$t \in \left\{ \frac{Y_{2n}}{Y_{2n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

これは、Theorem 3.4 と等式 (1), (2) から得られる。

4. PROOFS OF THE MAIN RESULTS

4.1. **Proof of Theorem 3.1.** はじめに, $\delta = 1$ の場合に,

$$\left\{ X(\pm 1) \right\} \cup \left\{ X\left(\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right), X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_{n+1}}{X_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \cup \left\{ X\left(\frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right), X\left(\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

が整数の集合となっていることを示す.

まず, $X(\pm 1) \in \mathbb{Z}$ であることは明らか. つぎに $X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_{n+1}}{X_n}\right)$

そして $X\left(\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right)$ が整数となることを示す. 実際,

$$X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right) = \frac{2Y_{n+1}^2 - aY_nY_{n+1}}{Y_{n+1}^2 - aY_nY_{n+1} + Y_n^2} = \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{Y_{n+1}^2 - Y_n(aY_{n+1} - Y_n)} \stackrel{(4)}{=} \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{Y_{n+1}^2 - Y_nY_{n+2}} \\ \stackrel{(6)}{=} \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{b^2}$$

$$X\left(\frac{X_{n+1}}{X_n}\right) = \frac{2X_n^2 - aX_nX_{n+1}}{X_{n+1}^2 - aX_nX_{n+1} + X_n^2} = \frac{X_n(2X_n - aX_{n+1})}{X_{n+1}^2 - X_n(aX_{n+1} - X_n)} \stackrel{(3)}{=} \frac{X_n(2X_n - aX_{n+1})}{X_{n+1}^2 - X_nX_{n+2}} \\ \stackrel{(3)(5)}{=} \frac{X_n(X_n - X_{n+2})}{-db^2} \stackrel{(13)}{=} \frac{X_nY_{n+1}}{b}$$

$$X\left(\frac{X_0}{X_1}\right) = 0$$

$n \geq 1$ のとき,

$$X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) = \frac{2X_{n+1}^2 - aX_nX_{n+1}}{X_{n+1}^2 - aX_nX_{n+1} + X_n^2} = \frac{X_{n+1}(2X_{n+1} - aX_n)}{X_{n+1}^2 - X_n(aX_{n+1} - X_n)} \stackrel{(3)}{=} \frac{X_{n+1}(2X_{n+1} - aX_n)}{X_{n+1}^2 - X_nX_{n+2}} \\ \stackrel{(3)(5)}{=} \frac{X_{n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})}{-db^2} \stackrel{(13)}{=} \frac{X_{n+1}Y_n}{b}$$

$$X\left(\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) = \frac{2Y_n^2 - aY_nY_{n+1}}{Y_{n+1}^2 - aY_nY_{n+1} + Y_n^2} = \frac{Y_n(2Y_n - aY_{n+1})}{Y_n^2 - Y_{n+1}(aY_n - Y_{n+1})} \stackrel{(4)}{=} \frac{Y_n(2Y_n - aY_{n+1})}{Y_n^2 - Y_{n+1}Y_{n-1}} \\ \stackrel{(6)}{=} \frac{Y_n(2Y_n - aY_{n+1})}{b^2}$$

任意の非負整数 n に対して, Y_n は b の倍数であるので, $X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right),$

$X\left(\frac{X_{n+1}}{X_n}\right) (n \geq 1)$ そして $X\left(\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) (n \geq 1)$ は整数である.

次に, $X\left(\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right), X\left(\frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right)$ が整数であることを示す.

実際, $a^2 - db^2 = 4$, (3), (8) より, 次の等式を得る.

$$2 - a\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1} = \left\{ 1 - a\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1} + \left(\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right)^2 \right\} \frac{Y_1 \pm Y_{2n}}{b} \quad (\text{複合同順})$$

$$2 - a \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1} = \left\{ 1 - a \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1} + \left(\frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1} \right)^2 \right\} \frac{Y_1 \pm Y_{2n}}{b} \quad (\text{複合同順})$$

上の等式の左辺が0でないことから,

$$X\left(\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right) = \frac{Y_1 \pm Y_{2n}}{b} \quad (\text{複合同順})$$

$$X\left(\frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right) = \frac{Y_1 \pm Y_{2n}}{b} \quad (\text{複合同順})$$

さらに, 任意の非負整数 n に対して, Y_n は b の倍数であるので, $X\left(\frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right), X\left(\frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}\right)$ が整数であることがいえる.

次に, $\delta = -1$ の場合に,

$$\left\{ X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right), X\left(-\frac{X_{n+1}}{X_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ X\left(-\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

が整数の集合であることを示す. 実際,

$$\begin{aligned} X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right) &= \frac{2Y_{n+1}^2 - aY_nY_{n+1}}{Y_{n+1}^2 - aY_nY_{n+1} - Y_n^2} = \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{Y_{n+1}^2 - Y_n(aY_{n+1} + Y_n)} \stackrel{(4)}{=} \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{Y_{n+1}^2 - Y_nY_{n+2}} \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{Y_{n+1}(2Y_{n+1} - aY_n)}{(-1)^nb^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\left(-\frac{X_{n+1}}{X_n}\right) &= \frac{2X_n^2 + aX_nX_{n+1}}{-X_{n+1}^2 + aX_nX_{n+1} + X_n^2} = \frac{X_n(2X_n + aX_{n+1})}{-X_{n+1}^2 + X_n(aX_{n+1} + X_n)} \stackrel{(3)}{=} \frac{X_n(2X_n + aX_{n+1})}{-X_{n+1}^2 + X_nX_{n+2}} \\ &\stackrel{(3)(5)}{=} \frac{X_n(X_n + X_{n+2})}{(-1)^n db^2} \stackrel{(13)}{=} \frac{X_nY_{n+1}}{(-1)^nb} \end{aligned}$$

$$X\left(\frac{X_0}{X_1}\right) = 0$$

$n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) &= \frac{2X_{n+1}^2 - aX_nX_{n+1}}{X_{n+1}^2 - aX_nX_{n+1} - X_n^2} = \frac{X_{n+1}(2X_{n+1} - aX_n)}{X_{n+1}^2 - X_n(aX_{n+1} + X_n)} \stackrel{(3)}{=} \frac{X_{n+1}(2X_{n+1} - aX_n)}{X_{n+1}^2 - X_nX_{n+2}} \\ &\stackrel{(3)(5)}{=} \frac{X_{n+1}(X_{n+1} + X_{n-1})}{-(-1)^n db^2} \stackrel{(13)}{=} -\frac{X_{n+1}Y_n}{(-1)^nb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\left(-\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) &= \frac{2Y_n^2 + aY_nY_{n+1}}{-Y_{n+1}^2 + aY_nY_{n+1} + Y_n^2} = \frac{Y_n(2Y_n + aY_{n+1})}{-Y_{n+1}^2 + Y_n(aY_{n+1} + Y_{n+1})} \stackrel{(4)}{=} \frac{Y_n(2Y_n + aY_{n+1})}{-Y_{n+1}^2 + Y_{n+2}Y_n} \\ &\stackrel{(6)}{=} -\frac{Y_n(2Y_n + aY_{n+1})}{(-1)^nb^2} \end{aligned}$$

任意の非負整数 n に対して, Y_n は b の倍数であるので, $X\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right), X\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right), X\left(-\frac{X_{n+1}}{X_n}\right)$ そして $X\left(-\frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) (n \geq 1)$ は整数である.

次に、 $\delta = 1$ の場合、もしある有理数 t に対して $X(t) = k$ となる整数 k が存在するならば、

$$t \in \{\pm 1\} \cup \left\{ \frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} \pm Y_1}, \frac{Y_n}{Y_{n+1}}, \frac{X_n}{X_{n+1}}, \frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} \pm Y_1}, \frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

となることを示す。 $k = 0$ ならば、

$$\frac{2 - at}{1 - at + t^2} = 0$$

したがって

$$t = \frac{2}{a} = \frac{X_0}{X_1}.$$

$k \neq 0$ ならば、

$$\frac{2 - at}{1 - at + t^2} = k$$

これから

$$kt^2 + a(1 - k)t + k - 2 = 0$$

ゆえに、

$$t = \frac{-a(1 - k) \pm \sqrt{a^2(1 - k)^2 - 4k(k - 2)}}{2k}$$

ここで t は有理数なので

$$a^2(1 - k)^2 - 4k(k - 2) = M^2$$

となる非負整数 M が存在する。ここで $a^2 - db^2 = 4$ より

$$M^2 - db^2(1 - k)^2 = 4$$

となる。これから、

$$M = X_{2n}, \quad b(1 - k) = \pm Y_{2n}$$

または

$$M = X_{2n+1}, \quad b(1 - k) = \pm Y_{2n+1}$$

となる非負整数 n が存在する。これから、有理数 t は以下のいずれかになる。

$$t = \frac{aY_{2n} + bX_{2n}}{2(b + Y_{2n})} \quad (A)$$

$$t = \frac{-aY_{2n} + bX_{2n}}{2(b - Y_{2n})} \quad (B)$$

$$t = \frac{aY_{2n} - bX_{2n}}{2(b + Y_{2n})} \quad (C)$$

$$t = \frac{-aY_{2n} - bX_{2n}}{2(b - Y_{2n})} \quad (D)$$

$$t = \frac{aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{2(b + Y_{2n+1})} \quad (E)$$

$$t = \frac{-aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{2(b - Y_{2n+1})} \quad (F)$$

$$t = \frac{aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{2(b + Y_{2n+1})} \quad (G)$$

$$t = \frac{-aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{2(b - Y_{2n+1})} \quad (H)$$

ここから, (A) から (H) を変形する.

(A) の場合, (4) と (12) より

$$t = \frac{aY_{2n} + bX_{2n}}{2(b + Y_{2n})} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} + Y_1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(B) の場合, (4) と (12) より

$$t = \frac{-aY_{2n} + bX_{2n}}{2(b - Y_{2n})} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} - Y_1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(C) の場合, (4) と (12) より

$$t = \frac{aY_{2n} - bX_{2n}}{2(b + Y_{2n})} = \begin{cases} -1 & (n = 0) \\ \frac{Y_{2n-1}}{Y_{2n} + Y_1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(D) の場合, (4) と (12) より

$$t = \frac{-aY_{2n} - bX_{2n}}{2(b - Y_{2n})} = \begin{cases} -1 & (n = 0) \\ \frac{Y_{2n+1}}{Y_{2n} - Y_1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(E) の場合,

$$t = \frac{aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(aX_n + dbY_n)}{2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{X_{n+1}}{X_n}$$

(F) の場合,

$$t = \frac{-aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)}{=} \frac{aX_{n+1} - dbY_{n+1}}{2X_{n+1}} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{X_n}{X_{n+1}}$$

(G) の場合,

$$t = \frac{aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_n(aX_{n+1} - dbY_{n+1})}{2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

(H) の場合,

$$t = \frac{-aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(aX_n + dbY_n)}{2X_{n+1}Y_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

次に, $\delta = -1$ の場合, もしある有理数 t に対して $X(t) = k$ となる整数 k が存在するならば,

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}}, \frac{X_n}{X_{n+1}}, -\frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ -\frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

となることを示す. $k = 0$ ならば,

$$\frac{2 - at}{1 - at - t^2} = 0$$

したがって

$$t = \frac{2}{a} = \frac{X_0}{X_1}.$$

$k \neq 0$ ならば,

$$\frac{2 - at}{1 - at - t^2} = k$$

これから

$$-kt^2 + a(1 - k)t + k - 2 = 0$$

ゆえに,

$$t = \frac{-a(1 - k) \pm \sqrt{a^2(1 - k)^2 + 4k(k - 2)}}{-2k}$$

ここで t は有理数なので

$$a^2(1 - k)^2 + 4k(k - 2) = M^2$$

となる非負整数 M が存在する. ここで $a^2 - db^2 = -4$ より

$$M^2 - db^2(1 - k)^2 = -4$$

となる. これから, 任意の非負整数 N に対して, $X_{2N}^2 - dY_{2N}^2 \neq -4$ より,

$$M = X_{2n+1}, \quad b(1 - k) = \pm Y_{2n+1}$$

となる非負整数 n が存在する. これから, 有理数 t は以下のいずれかになる

$$t = \frac{aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \quad (I)$$

$$t = \frac{-aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \quad (J)$$

$$t = \frac{aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \quad (K)$$

$$t = \frac{-aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \quad (L)$$

ここから, (I) から (L) を変形する.

n が奇数で (I) の場合

$$t = \frac{aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(aX_n + dbY_n)}{-2X_{n+1}Y_n} \stackrel{(3)(13)}{=} -\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

n が偶数で (I) の場合

$$t = \frac{aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(aX_n + dbY_n)}{-2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} -\frac{X_{n+1}}{X_n}$$

n が奇数で (J) の場合

$$t = \frac{-aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_n(-aX_{n+1} + dbY_{n+1})}{2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

n が偶数で (J) の場合

$$t = \frac{-aY_{2n+1} + bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_n(-aX_{n+1} + dbY_{n+1})}{2X_{n+1}Y_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{X_n}{X_{n+1}}$$

n が奇数で (K) の場合

$$t = \frac{aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_n(aX_{n+1} - dbY_{n+1})}{-2X_{n+1}Y_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{X_n}{X_{n+1}}$$

n が偶数で (K) の場合

$$t = \frac{aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b + Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_n(aX_{n+1} - dbY_{n+1})}{-2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} \frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

n が奇数で (L) の場合

$$t = \frac{-aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(-aX_n - dbY_n)}{2Y_{n+1}X_n} \stackrel{(3)(13)}{=} -\frac{X_{n+1}}{X_n}$$

n が偶数で (L) の場合

$$t = \frac{-aY_{2n+1} - bX_{2n+1}}{-2(b - Y_{2n+1})} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{Y_{n+1}(-aX_n - dbY_n)}{2X_{n+1}Y_n} \stackrel{(3)(13)}{=} -\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

これで証明は完了である.

4.2. **Proof of Theorem 3.4.** はじめに,

$$\left\{ Y\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ Y\left(\delta \frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

が整数の集合であることを示す. 実際

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right) &= \frac{bY_{n+1}Y_n}{Y_{n+1}^2 - aY_{n+1}Y_n + \delta Y_n^2} = \frac{bY_{n+1}Y_n}{Y_{n+1}^2 - Y_n(aY_{n+1} - \delta Y_n)} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{bY_{n+1}Y_n}{Y_{n+1}^2 - Y_nY_{n+2}} \stackrel{(6)}{=} \frac{Y_{n+1}Y_n}{b\delta^n} \end{aligned}$$

$n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} Y\left(\delta \frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) &= \frac{bY_{n+1}Y_n}{Y_{n+1}^2 - aY_{n+1}Y_n + \delta Y_n^2} = \frac{bY_{n+1}Y_n}{\delta Y_n^2 + Y_{n+1}(Y_{n+1} - aY_n)} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{bY_{n+1}Y_n}{\delta Y_n^2 - \delta Y_{n+1}Y_{n-1}} \stackrel{(6)}{=} \frac{Y_{n+1}Y_n}{b\delta^n} \end{aligned}$$

任意の非負整数 n に対して, Y_n は b の倍数であるので,

$$\left\{ Y\left(\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ Y\left(\delta \frac{Y_{n+1}}{Y_n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

が整数の集合であることがわかった.

次に, もし, ある有理数 t に対して $Y(t) = k$ となる整数 k が存在するならば,

$$t \in \left\{ \frac{Y_n}{Y_{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \delta \frac{Y_{n+1}}{Y_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

となることを示す. $k = 0$ ならば,

$$\frac{bt}{1 - at + \delta t^2} = 0$$

したがって

$$t = 0 = \frac{Y_0}{Y_1}.$$

$k \neq 0$ ならば,

$$\frac{bt}{1 - at + \delta t^2} = k$$

これから

$$\delta kt^2 + (-ak - b)t + k = 0$$

ゆえに,

$$t = \frac{ak + b \pm \sqrt{(ak + b)^2 - 4\delta k^2}}{2\delta k}$$

ここで t は有理数なので

$$(ak + b)^2 - 4\delta k^2 = M^2$$

となる非負整数 M が存在する. ここで $a^2 - db^2 = 4\delta$ より

$$(a + dbk)^2 - dM^2 = 4\delta$$

となる. これから, $\delta = 1$ のとき

$$a + dbk = X_{2n+1}, \quad M = Y_{2n+1}$$

となる非負整数 n が存在する. 実際, もし

$$a + dbk = \pm X_{2n}, \quad M = Y_{2n}$$

となる非負整数 n が存在したとすると, (10) と $X_n^2 - dY_n^2 = 4$ より $a \pm 2$ は db の倍数. よって $a = dbl \pm 2$ となる整数 l が存在する. $a^2 - db^2 = 4$ より

$$(dbl \pm 2)^2 - db^2 = 4$$

となるが, $d \geq 5$ なのでこの等式を満たすような整数 l は存在しないので矛盾. また,

$$a + dbk = -X_{2n+1}, \quad M = Y_{2n+1}$$

となる非負整数 n が存在したとすると, (8) より, $2a$ は db の倍数. $2a = dbl$ となる整数 l が存在する. $a^2 - db^2 = 4$ より

$$(dbl)^2 - 4db^2 = 16$$

となるが, $d \geq 5$ なのでこの等式を満たすような整数 l は存在しないので矛盾. したがって, 有理数 t は以下のいずれかになる

$$t = \frac{a(X_{2n+1} - a) + db^2 + dbY_{2n+1}}{2(X_{2n+1} - a)} \quad (M)$$

$$t = \frac{a(X_{2n+1} - a) + db^2 - dbY_{2n+1}}{2(X_{2n+1} - a)} \quad (N)$$

ここから, (M) と (N) を変形する.

(M) の場合

$$t = \frac{a(X_{2n+1} - a) + db^2 + dbY_{2n+1}}{2(X_{2n+1} - a)} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{aY_n + bX_n}{2Y_n} \stackrel{(4)(12)}{=} \frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

(N) の場合

$$t = \frac{a(X_{2n+1} - a) + db^2 - dbY_{2n+1}}{2(X_{2n+1} - a)} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{aY_{n+1} - bX_{n+1}}{2Y_{n+1}} \stackrel{(4)(12)}{=} \frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

$\delta = -1$ のとき, 任意の非負整数 N に対して, $X_{2N}^2 - dY_{2N}^2 \neq -4$ より

$$a + dbk = \pm X_{2n+1}, \quad M = Y_{2n+1}$$

となる非負整数 n が存在する.

さらに (8) と $d \geq 5$ より

$$(-1)^n(a + dbk) = X_{2n+1}.$$

であることがわかる.

したがって, 有理数 t は以下のいずれかになる.

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 + dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \quad (O)$$

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 - dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \quad (P)$$

ここから, (O) と (P) を変形する.

n が奇数で (O) の場合

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 + dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \stackrel{(7)(8)}{=} \frac{-aY_{n+1} + bX_{n+1}}{-2Y_{n+1}} \stackrel{(4)(12)}{=} -\frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

n が偶数で (O) の場合

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 + dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{aY_n + bX_n}{2Y_n} \stackrel{(4)(12)}{=} \frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

n が奇数で (P) の場合

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 - dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \stackrel{(7)(8)}{=} \frac{-aY_n - bX_n}{-2Y_n} \stackrel{(4)(12)}{=} \frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

n が偶数で (P) の場合

$$t = \frac{a\{(-1)^n X_{2n+1} - a\} + db^2 - dbY_{2n+1}}{2\{(-1)^n X_{2n+1} - a\}} \stackrel{(7)(8)(9)}{=} \frac{aY_{n+1} - bX_{n+1}}{2Y_{n+1}} \stackrel{(4)(12)}{=} -\frac{Y_n}{Y_{n+1}}$$

これで証明は完了である.

5. PROBLEM

Theorem 3.4 においては $d \geq 5$ の仮定の下に証明した. $d = 2$ および $d = 3$ については本研究で考察していないが, $Y(t)$ が整数になる有理数 t の必要十分条件が求められるはずである. 研究課題として問題を残しておきたい.

REFERENCES

- [1] A. Bulawa, W. K. Lee, *Integral values of the Generating Functions for the Fibonacci and related sequences*, Fibonacci Quart. **55** (2017), no. 1, 74-81.
- [2] D. S. Hong, *When is the generating function of the Fibonacci numbers an integer?*, College Math. J. **46** (2015), 110-112.
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley, New York, 2001.
- [4] 中村滋, フィボナッチ数の生成関数を整数にする有理数, 第15回日本フィボナッチ協会研究集会報告書, 2017.
- [5] P. Pongsriiam, *Integral values of the Generating Functions of Fibonacci and Lucas Numbers*, College Math. J. **48** (2017), 97-101.
- [6] 高木貞治, 初等整数論講義, 第2版, 共立出版, 1971.

- [7] P. Schub, *A Minor Fibonacci Curiosity*, Scripta Mathematica, **16** (1950), 214.
- [8] Y. Tsuno, *Extended results on integer values of generating functions for sequences given by Pell's equations*, Fibonacci Quart. To appear.
- [9] 津野祐司, ペル方程式から得られる数列の生成関数が整数値をとる有理数の必要十分条件, 第17回日本フィボナッチ協会研究集会報告書, 2019.

YUJI TSUNO: IIDA OIDE OSAHIME HIGH SCHOOL, 2535-2, NAGOKUMA, KANAE, IIDA CITY, NAGANO, JAPAN

E-mail address: tsuno.yuji@gmail.com

A certain generalization of the Collatz conjecture

Yuta Kamaguchi (Kaijo High School)

Abstract

In this paper, we introduce a generalized conjecture including the Collatz conjecture which has the feature that all positive integers reach 1 by iterating the function a finite number of times.

Introduction

The Collatz conjecture is an unsolved problem in number theory, which was proposed by Lothar Collatz in 1937.

Conjecture 1. (Collatz conjecture)

Let N be a positive integer. Define the Collatz function $C(N)$ as follows:

$$C(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{if } N \text{ is even,} \\ \frac{3N + 1}{2} & \text{if } N \text{ is odd.} \end{cases}$$

The Collatz conjecture states that for all positive integers N , there exists a positive integer s such that $C^s(N) = 1$.

To date, various similar functions have been considered as an extension of the Collatz conjecture. However, none of them has the most significant feature of the Collatz conjecture that all positive integers definitely reach 1 by iterating the function.

For example, the extension that changes the multiplier and the addend when N is odd. In this case, if we iterate the function, depending on the multiplier and the addend, some N enter a non-trivial periodic cycle, other N diverge to positive infinity. Also, it's impossible to predict what kind of cycles exist depending on the multiplier and the addend. Therefore, this extension is not a generalization of the Collatz conjecture.

Another example is the extension proposed by Zhang Zhongfu and Yang Shiming [1].

Define the prime progression as $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$.

Define $T(N)$ as follows:

$$T(N) = \begin{cases} \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} & \text{where the } p_i \text{ are exactly the primes } \leq p_n \text{ dividing the numerator,} \\ p_{n+1} N + 1 & \text{if no prime } p_i \leq p_n \text{ divides } N. \end{cases}$$

In this extension, the case $n = 1$ is the Collatz conjecture. However, if we iterate the function, depending on n , some N enter a non-trivial periodic cycle. Moreover, the condition for reaching 1 becomes looser as n becomes larger.

Main Result

We obtained the following conjecture.

Conjecture 2. (Generalized Collatz conjecture)

Let N be a positive integer and n be a positive integer greater or equal to 2 except $n_k (k = 0, 1, 2, \dots)$.

n_k is

12, 19, 23, 25, 27, 41, 48, 49, 56, 57, 66, 69, 74, 97, 102, 107, 108, 153, 155, 156, 160, 188, 209, 224, 228, 235, 238, 249, ...

Let q, r be the quotient and the remainder calculated by dividing N by n .

Let q_k, r_k be the quotient and the remainder calculated by dividing k by 4.

Define $f(N, n)$ as follows:

$$f(N, n) = \begin{cases} \frac{N}{n} & \text{if } r = 0 \\ \frac{(n+1)N + a(n, r)}{n} = (q+1)n + q + v(n, r) & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $a(n, r) = n^2 - (r - v(n, r))n - r$

and $v(n, r)$

$$= \begin{cases} \begin{cases} 2 & (r \neq 1, 3) \\ 0 & (r = 1, 3) \end{cases} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} (r \neq n_k - 1) \\ \begin{cases} \begin{cases} 2 & (q_k \equiv 0, 2 \pmod{8}, r_k = 2) \\ -1 & (n-r \equiv 0 \pmod{2}) \\ -2 & (n-r \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases} & \left. \begin{matrix} (q_k \equiv 4, 6 \pmod{8}, r_k = 0) \\ \end{matrix} \right\} \text{(otherwise)} \\ \begin{cases} 2 & (n-r \equiv 0 \pmod{2}) \\ 1 & (n-r \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases} & \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} (q_k \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} (r = n_k - 1). \end{cases}$$

Now, we propose the conjecture that for all N and all n , there exists a positive integer s such that $f^s(N, n) = 1$.

The case $n = 2$ coincides with the Collatz conjecture.

The table of the values of $a(n, r)$ is shown below:

$r \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	5	11	19	29	41	55	71	89	109
2		7	14	23	34	47	62	79	98	119
3			1	7	15	25	37	51	67	85
4				11	20	31	44	59	76	95
5					13	23	35	49	65	83
6						15	26	39	54	71
7							17	29	43	59
8								19	32	47
9									21	35
10										23

Table: Values of $a(n, r)$

It is confirmed by computer calculation that there exists a positive integer s such that $f^s(N, n) = 1$ for N of 1 to 10,000,000 when n is 2 or more and 250 or less except n_k .

Conclusion

We could find a simple and natural generalization of the Collatz conjecture. However, further consideration will be needed to yield any findings about a reason why $a(n, r)$ is a quadratic expression in n , a simple and unified understanding of $v(n, r)$ and the truth of the conjecture.

Reference

[1] Lesieutre, John(2007). On a Generalization of the Collatz Conjecture.

<http://web.mit.edu/rsi/www/pdfs/papers/2004/2004-lesjohn.pdf> (accessed 2020-9-21).

黄金比とフラクタル図形

第18回日本フィボナッチ協会研究集会

放送大学教養学部4年
生活と福祉コース
久保田 和臣

本プレゼンについて

- 黄金比： $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$
- フラクタル図形と黄金比について
 - 黄金比 ϕ 、フィボナッチ数に関するフラクタル図形を紹介
 - Windows用のソフトを作成
 - 動画にまとめた。ページ下部のリンク・QRコードからアクセス可能。
- 今回取り上げるフラクタル図形
 - IFS (Iterated Function System、反復関数系)
 - L-system
- フラクタル図形の相似次元
 - 縮小写像： F_1, F_2, \dots, F_n
 - フラクタル図形 K が縮小写像の像の和： $K = F_1(K) \cup F_2(K) \cup \dots \cup F_n(K)$
 - 縮小率： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($0 < \lambda_i < 1$)
 - 相似次元 d ： $\lambda_1^d + \lambda_2^d + \dots + \lambda_n^d = 1$ の解

IFS (Iterated Function System, 反復関数系)

- 縮小写像

- 次のAffine縮小写像で表されるとする。(i=1,2,...,n)

$$F_i \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ |ad - bc| < 1 \end{array}$$

- 標準系

- 縮小写像が F_1, F_2 の2つであり、それぞれの不動点が $(0,0)$ と $(1,0)$
- 4つの複素数を用いて、複素平面上の次の変換で表される。

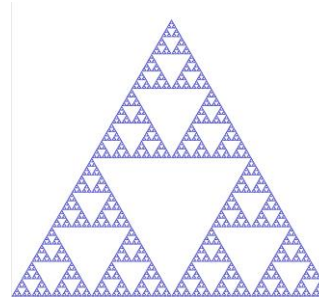
$$\begin{cases} F_1(z) = \alpha z + \beta \bar{z} & (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}) \\ F_2(z) = \gamma(z - 1) + \delta(\bar{z} - 1) + 1 & (|\alpha| + |\beta| < 1, |\gamma| + |\delta| < 1) \end{cases}$$

- まとめて、次のように表すと便利である。

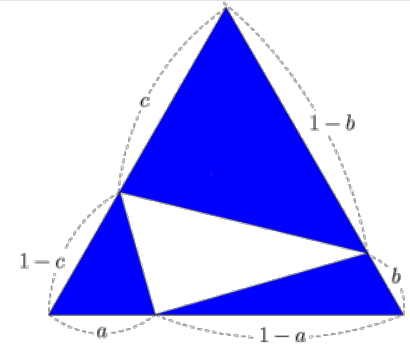
$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

IFS (Iterated Function System, 反復関数系)の例

- 縮小写像の例
 - Sierpinskiのガスケット



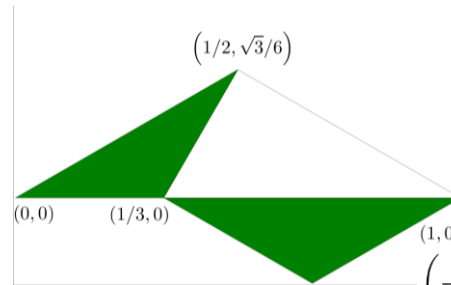
$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58496$$



$$\left(\sqrt{a(1-c)}\right)^d + \left(\sqrt{b(1-a)}\right)^d + \left(\sqrt{c(1-b)}\right)^d = 1$$

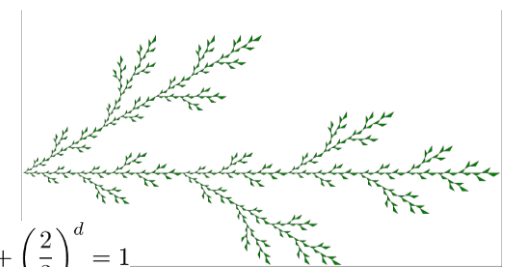
$a = 0.3, b = 0.2, c = 0.6$ の時
 $d \approx 1.5145$

- 標準系の例
 - 葉脈曲線(畑 政義、京大)



$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{2}{3}\right)^d = 1$$

$d \approx 1.4635$



Sierpinskiのガスケット

<https://www.youtube.com/watch?v=IcCIWNY2dAo>

<https://www.youtube.com/watch?v=S3JWwO8j-7M>



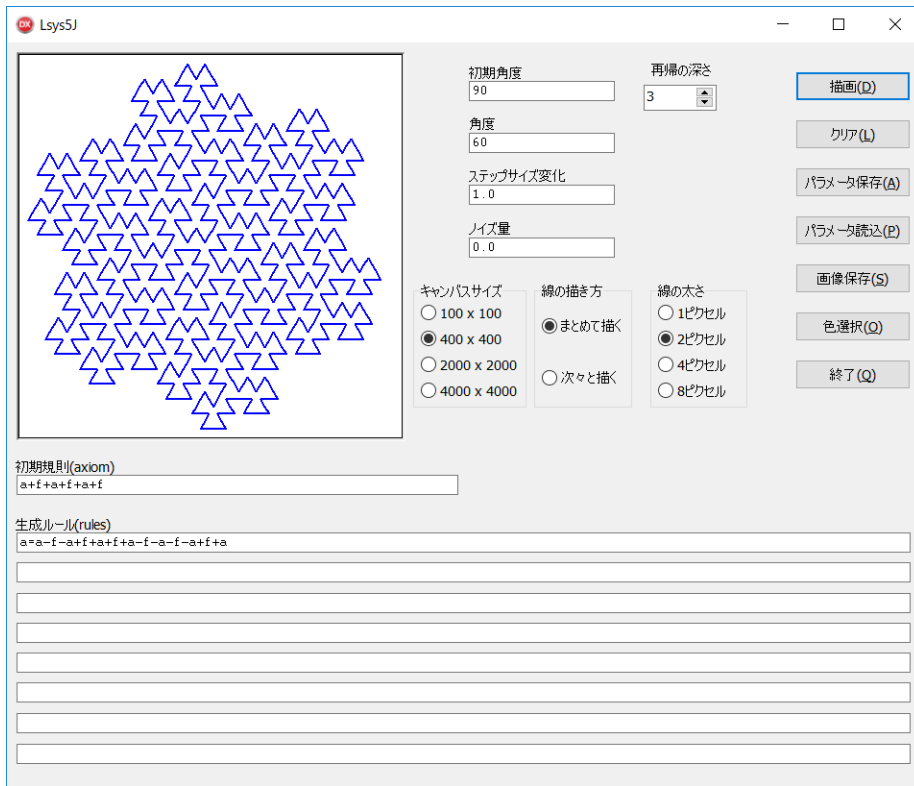
葉脈曲線

https://www.youtube.com/watch?v=z3haY82x_hM



L-system

- 自己相似図形・フラクタル図形や植物の成長プロセスを初めとした様々な自然物の構造を記述・表現できるアルゴリズム



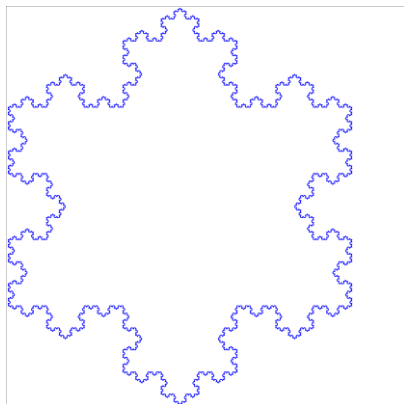
記号	意味
F	一定の長さだけ線を描いて進む
G	一定の長さだけ線を描かずに進む
F,G以外	進まない
+	指定の角度だけ時計回りに向く
-	指定の角度だけ反時計回りに向く
自然数n	角度+または-をn倍する(+++を3+)
[位置と向きをスタックに保存する
]	位置と向きをスタックから呼び出す
	再帰の深さに応じ、「ステップサイズ変化」から計算されるだけ線を描いて進む

今回採用したルールは、次の文献に準拠している。

Gary William Flake, The Computational Beauty of Nature, A Bradford Book/The MIT Press, 1998, ISBN 0-262-56127-1

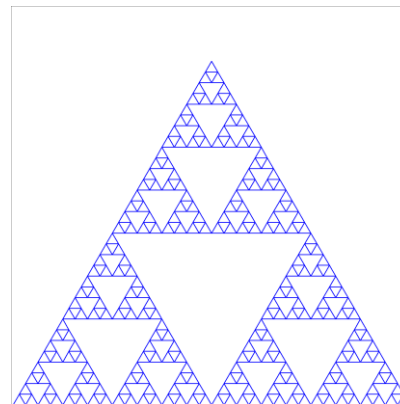
L-systemの例

- Koch snowflake



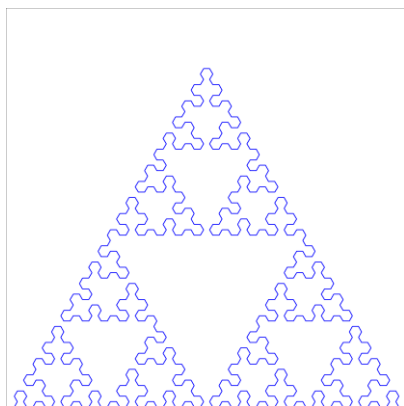
角度：60
ステップサイズ変化：1.0
初期規則：f++f++f
生成ルール1：f=f-f++f-f

- Sierpinski gasket



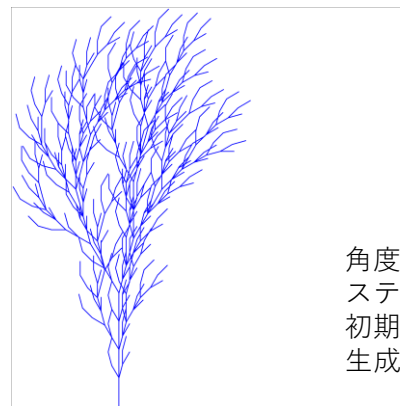
角度：120
ステップサイズ変化：1.0
初期規則：F-F-F
生成ルール1：F=F[-F]F

- Sierpinski arrowhead



角度：60
ステップサイズ変化：1.0
初期規則：LF
生成ルール1：L=-FR+FL+FR-
生成ルール2：R=+LF-RF-LF+
生成ルール3：F=

- Plant

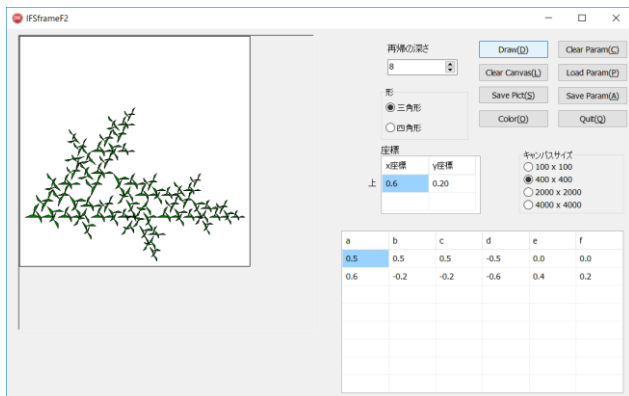


角度：15
ステップサイズ変化：1.0
初期規則：f
生成ルール1：f=ff[--f+f++f][+f[+f][-f+f]]

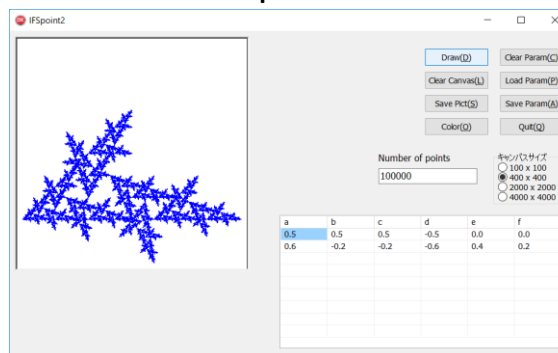
作成したソフトウェアその1

- 次にスクリーンショットを示す。動画は下のリンクとQRコードにある。

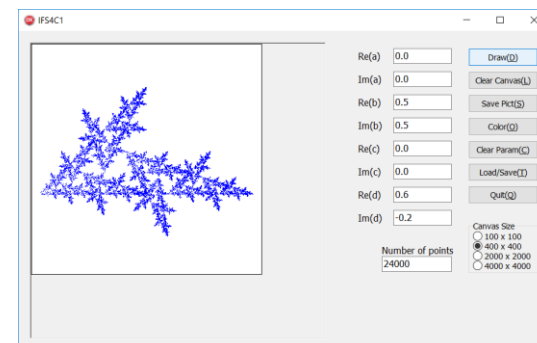
IFSframeF2



IFSpoint2



IFS4C1



ソフトウェアIFSframeF2

<https://www.youtube.com/watch?v=EMbueeAp4kE>



ソフトウェアIFSpoint2

<https://www.youtube.com/watch?v=7njiVqHOJO4>



ソフトウェアIFS4C1

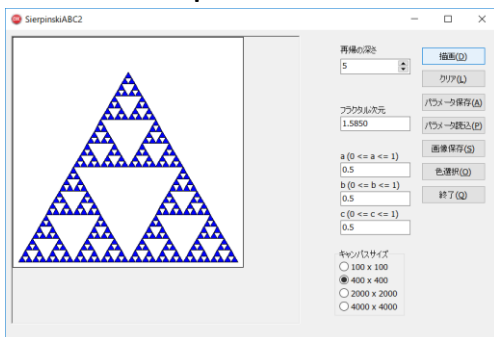
<https://www.youtube.com/watch?v=9OcSWEkTpzg>



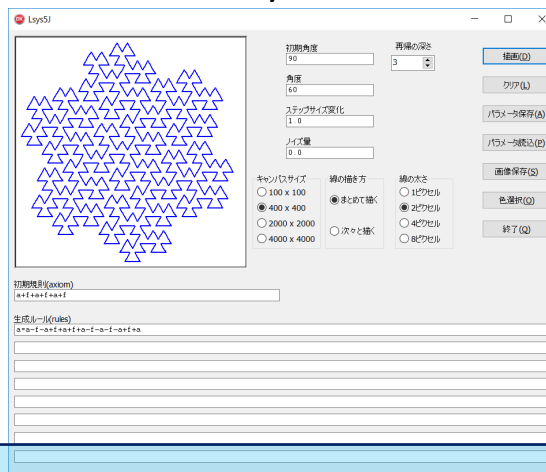
作成したソフトウェアその2

- 次にスクリーンショットを示す。動画は下のリンクとQRコードにある。

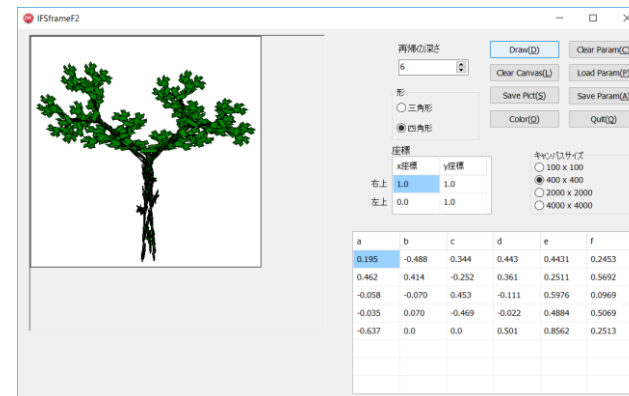
SierpinskiABC2



Lsys5J



データのロードと色変更



ソフトウェアSierpinskiABC2

<https://www.youtube.com/watch?v=t9GqUKGOkRo>



ソフトウェアLsys5J

<https://www.youtube.com/watch?v=ZFpqLojT7Jw>



データのロードと色変更

<https://www.youtube.com/watch?v=FJ9LEDJ1X60>



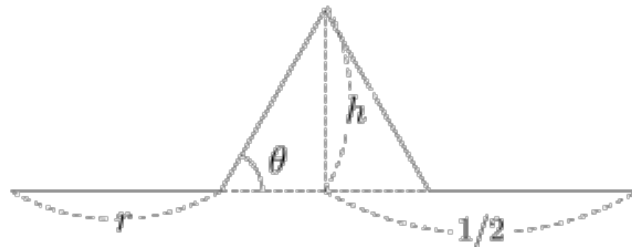
Koch曲線

- 代表的なフラクタル図形の一つ



- Koch曲線と黄金比 ϕ

- 下図のように r, h, θ をとり、次のページにいくつか例示する。



IFSframeF2によるKoch曲線

<https://www.youtube.com/watch?v=vUJ84k6h7j8>



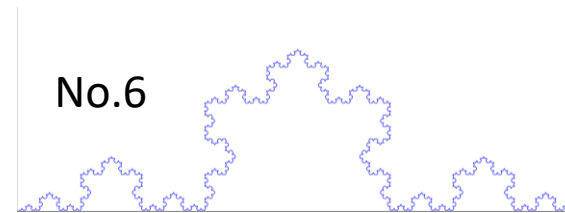
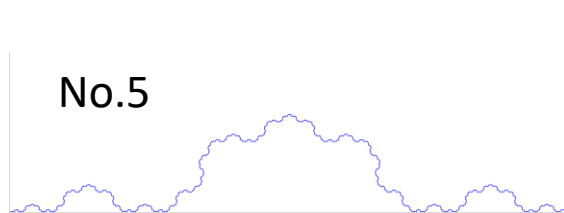
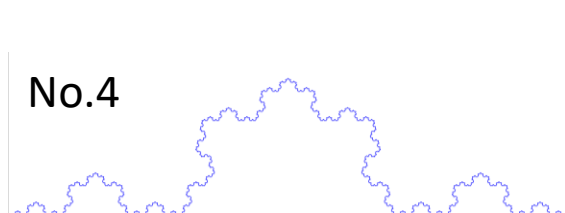
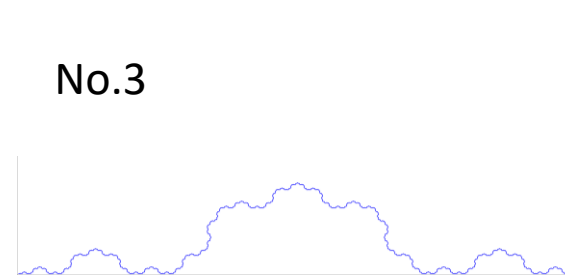
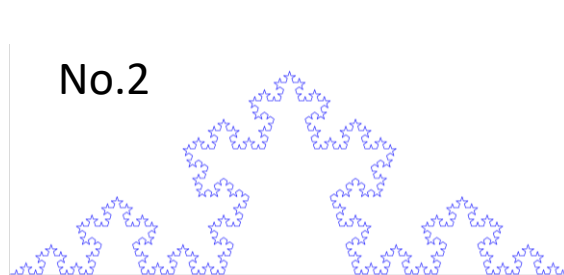
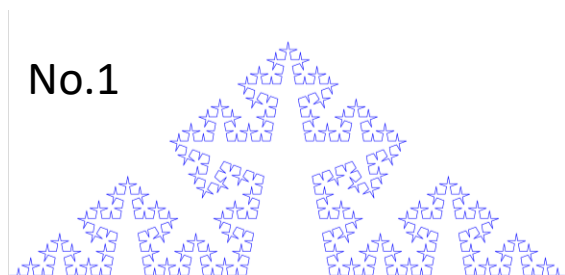
Lsys5JによるKoch曲線

<https://www.youtube.com/watch?v=APFnun5j3B0>



黄金比に関連したKoch曲線の一覧

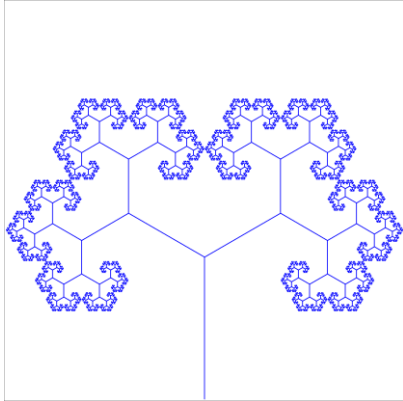
No.	r	θ	h	相似次元d
1	0.424528...	79.7596°	0.4177656...	ϕ
2	$1/(\phi+1)$	$\pi/5$	$((3-\phi)/(\phi+1))^{0.5}/2$	$\log 2/\log \phi$
3	$1/(\phi+2)$	$\pi/10$	$((2-\phi)/(\phi+2))^{0.5}/2$	$\log 4/\log(\phi+2)$
4	$1/2\phi$	$\cos^{-1}(1/\phi)$	$(2/\phi-1)^{0.5}/2$	$\log 4/\log(2\phi)$
5	$\phi^{0.5}/2(1+\phi^{0.5})$	$\tan^{-1}(1/\phi^{0.5})$	$((\phi^{0.5}-1)/(\phi^{0.5}+1))^{0.5}/2$	$\log 4/\log 2(1+1/\phi^{0.5})$
6	1/3	$\pi/3$	$1/2/3^{0.5}$	$\log 4/\log 3$



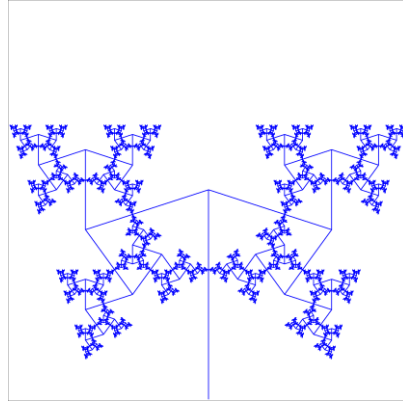
Fractal trees

- L-systemで作成できる次の図形

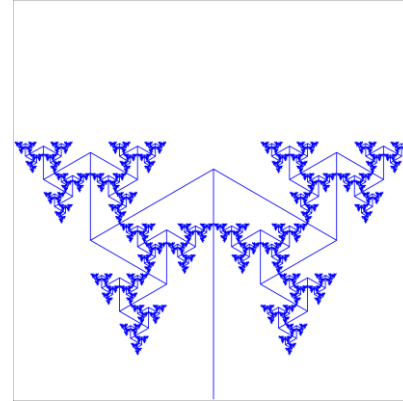
60度



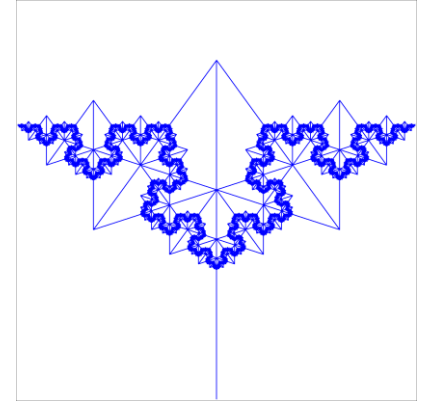
108度



120度



144度

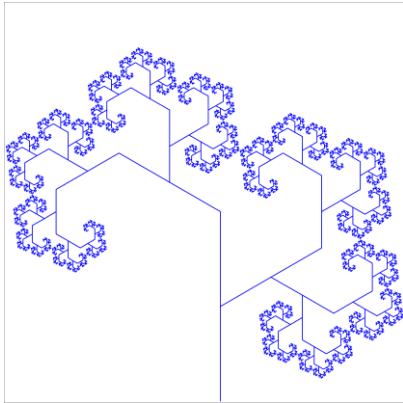


上記の図形のL-systemパラメータ
角度：60, 108, 120, 144 のいずれか
ステップサイズ変化：0.61803398874989
初期規則：F
生成ルール1：F=|[+F][-F]

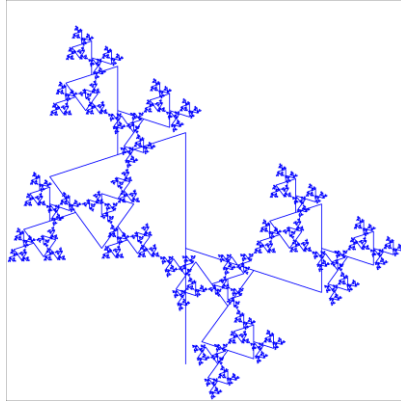
Fractal trees

- 生成ルールを変えると、図形が変わる

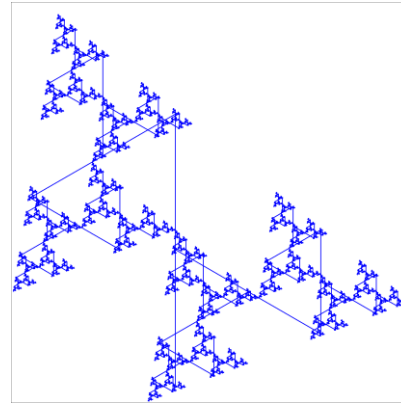
60度



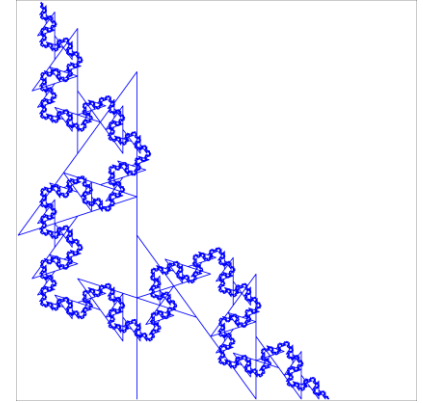
108度



120度



144度

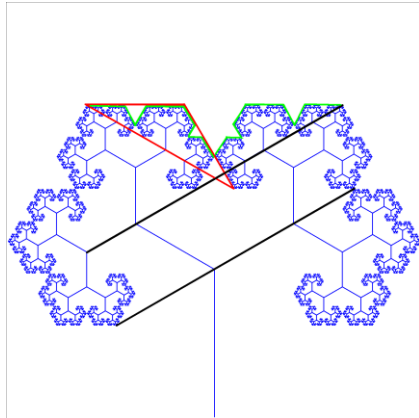


上記の図形のL-systemパラメータ
角度：60, 108, 120, 144 のいずれか
ステップサイズ変化：0.61803398874989
初期規則：F
生成ルール1：F=|[+F]|[-F]

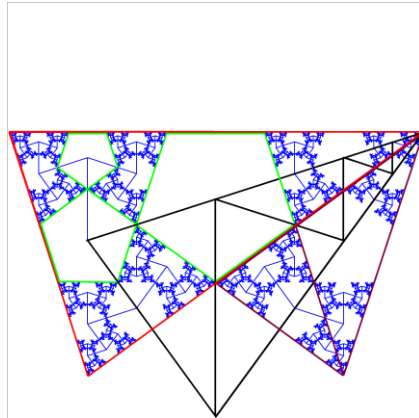
Fractal trees

- Fractal treesと黄金比

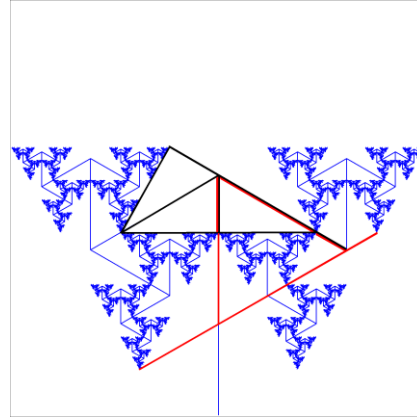
60度



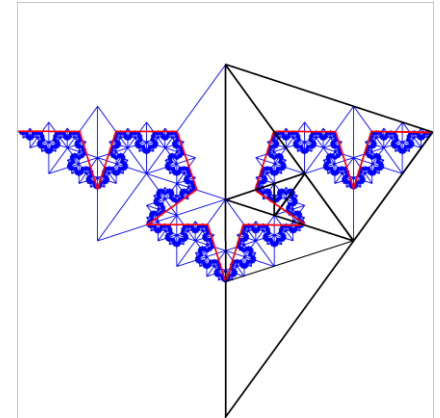
108度



120度



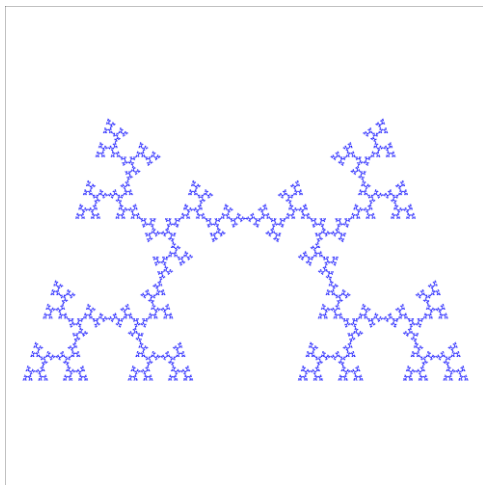
144度



三角形は黄金比と関係ないが、
L-systemのステップサイズ変化は $\phi-1$

Fractal trees (108度)

- IFSによる描画

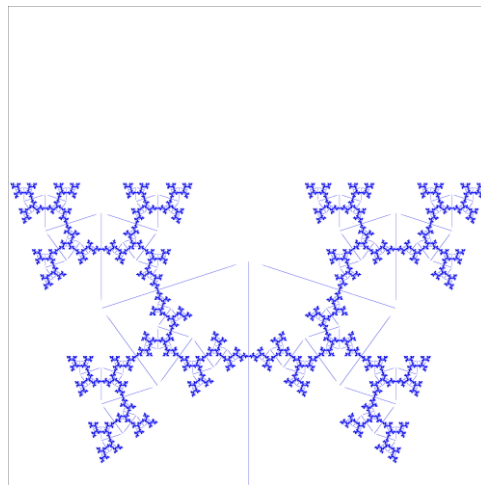


$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

$$\mu = 1 - \exp(-\pi i/5)$$

$$\alpha = 0, \beta = \mu$$

$$\gamma = 0, \delta = \bar{\mu}$$



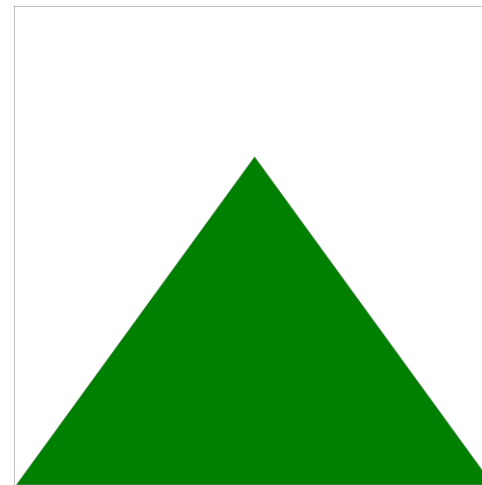
$$a = -0.190983$$

$$b = 0.587785$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$a = 0.190983$$

$$b = 0.587785$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a \\ b \end{pmatrix}$$

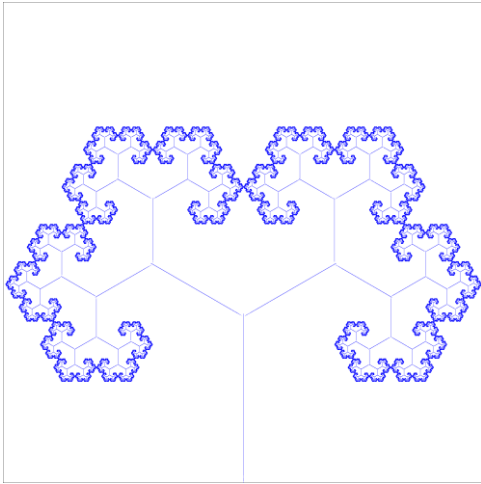
IFSによるFractal tree (108度)

<https://www.youtube.com/watch?v=4TYf6rQ-5Og>



Fractal trees (60度、144度)

- IFSによる描画

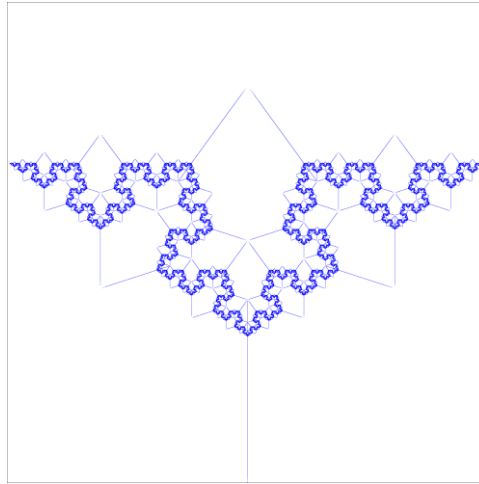


$$a = 0.309017$$
$$b = 0.535233$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$a = -0.500000$$
$$b = 0.363272$$

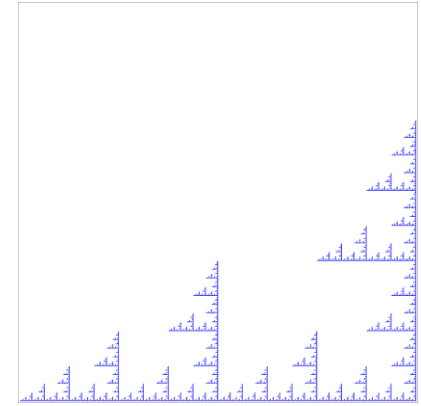
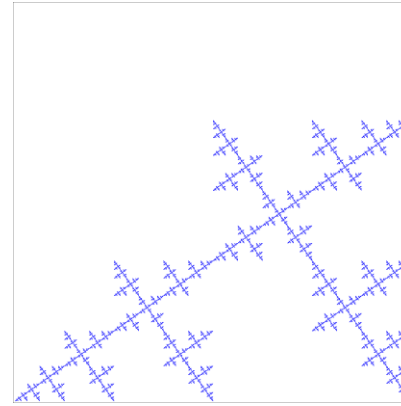
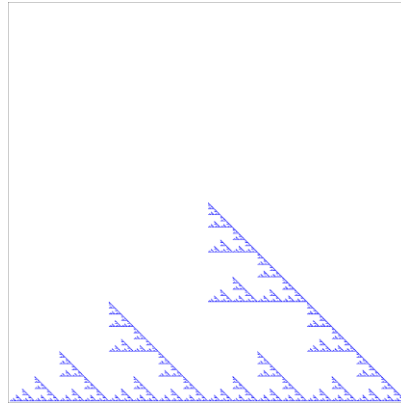
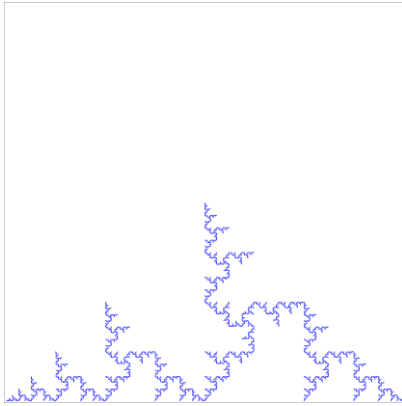
$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

フィボナッチ数と関係のあるフラクタル図形

- 2つのAffine縮小写像からなる4つの図形



$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

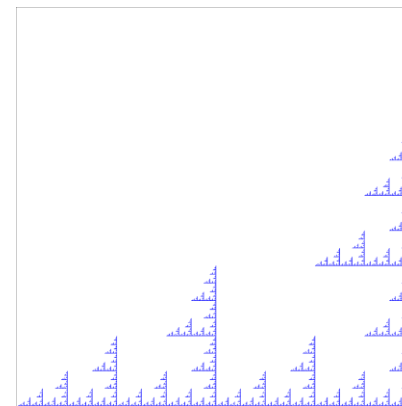
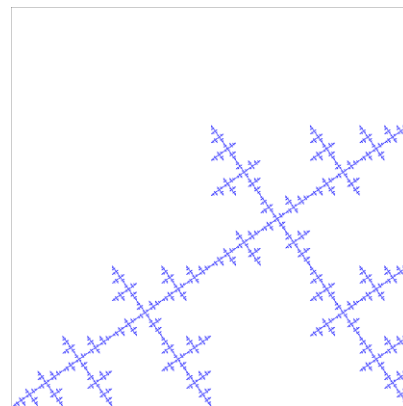
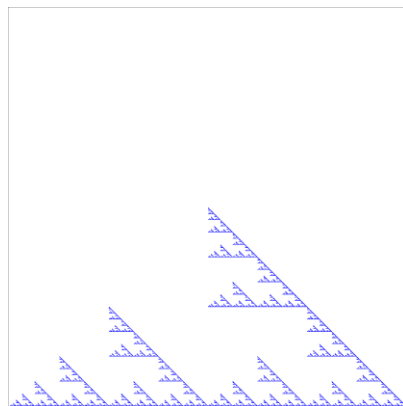
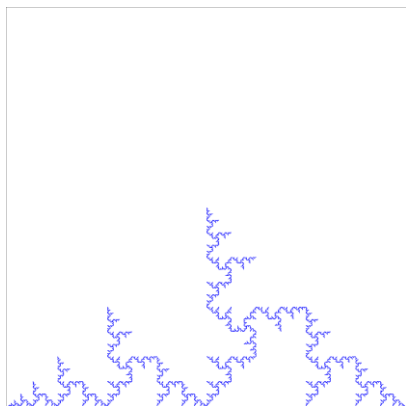
$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

フィボナッチ数と関係のあるフラクタル図形

- 相似次元は、4つの図形で共通



$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d = 1$$

ここで、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d = x$ とおくと、

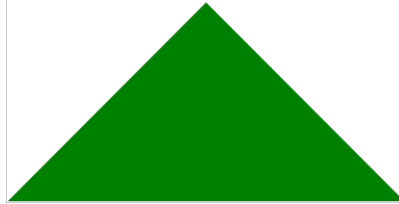
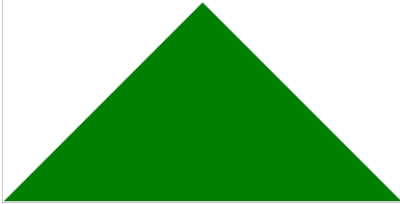
$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ より、} x = \phi - 1 \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

したがって、

$$d = \frac{-2 \log(\phi - 1)}{\log 2} = -\frac{\log(2 - \phi)}{\log 2} \approx 1.388$$

フィボナッチ数と関係のあるフラクタル図形

- 2つのAffine縮小写像からなる4つの図形(動画)



Fib1F1

<https://www.youtube.com/watch?v=GNwa-1SjyF0>



Fib1F2'

https://www.youtube.com/watch?v=89OTc_AckAk



Fib1F3

https://www.youtube.com/watch?v=nu_-ucs8ZuM



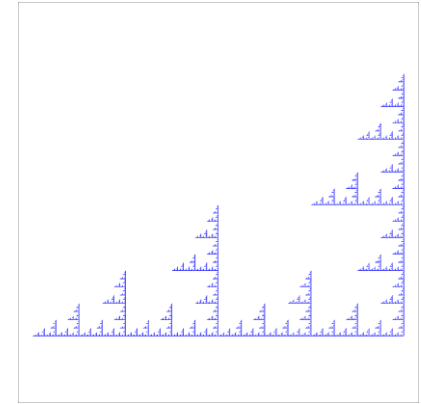
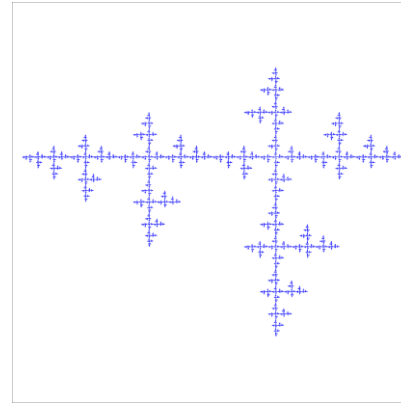
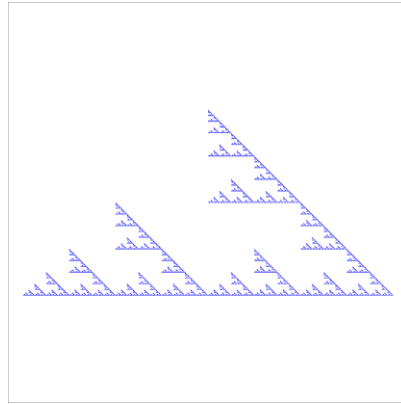
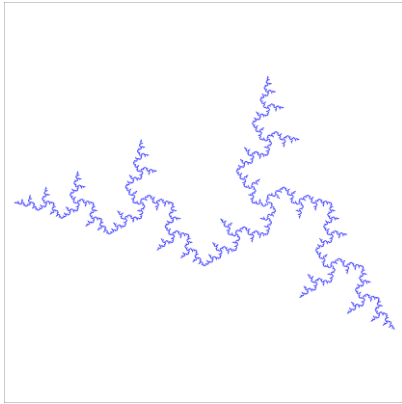
Fib1F4'

<https://www.youtube.com/watch?v=TU4cXzugG-g>



フィボナッチ数と関係のあるフラクタル図形

- Affine縮小写像の標準形



$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.5$
 $\beta = 0$
 $\gamma = 0.5 + 0.5i$
 $\delta = 0$

$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.5$
 $\beta = 0$
 $\gamma = 0$
 $\delta = 0.5 + 0.5i$

$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.5$
 $\beta = 0$
 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}i$
 $\delta = 0$

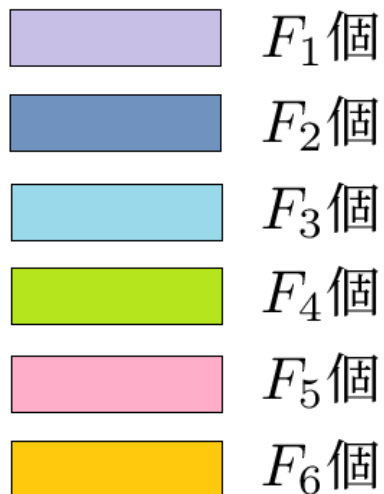
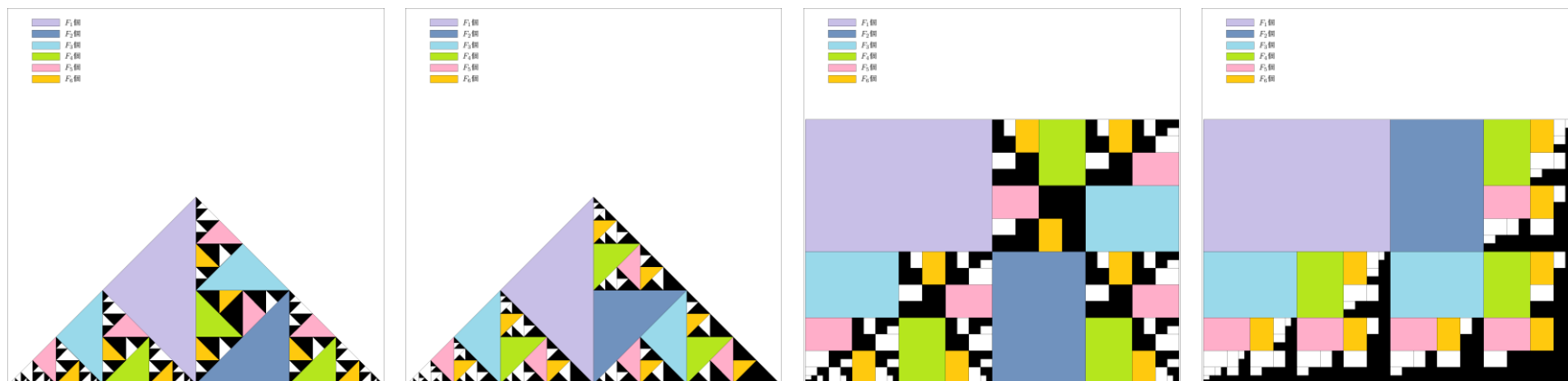
$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.5$
 $\beta = 0$
 $\gamma = 0$
 $\delta = -\frac{1}{\sqrt{2}}i$

1番目と3番目の図形は、(0,0)と(1,0)を不動点に取れないので、傾いている。

フィボナッチ数と関係のあるフラクタル図形

- くりぬかれた部分とフィボナッチ数との関係

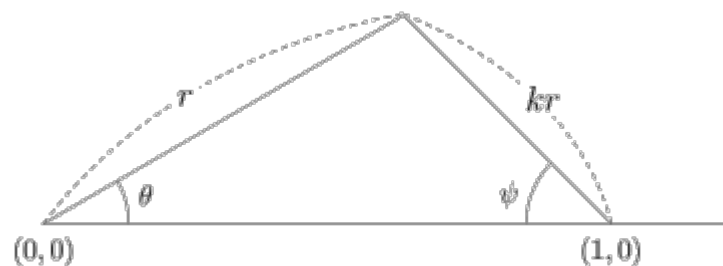


図形の左半分と右半分を比較すると、
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

も確認できる。

Golden dragon

- ドラゴン曲線の一つ。相似次元が黄金比 ϕ に等しい。



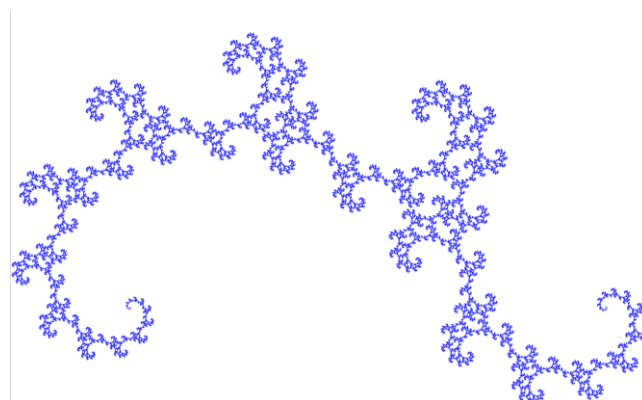
$$r^\phi + (kr)^\phi = 1 \text{ より、} r = \frac{1}{(1 + k^\phi)^{1/\phi}} = (1 + k^\phi)^{-1/\phi}$$
$$\cos \theta = \frac{1 + (1 - k^2) r^2}{2r}, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (0 < \theta < \pi/2)$$
$$\cos \psi = \frac{1 + (k^2 - 1) r^2}{2kr}, \sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} \quad (0 < \psi < \pi/2)$$

kを決めてやると、r、 θ 、 ψ が決まる。

2つのAffine縮小写像は、下記の通り。

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kr \cos \psi & -kr \sin \psi \\ kr \sin \psi & -kr \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

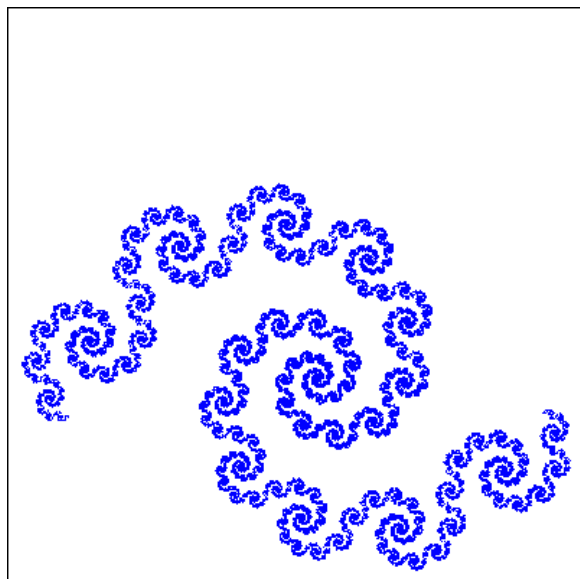
例：k=rの場合



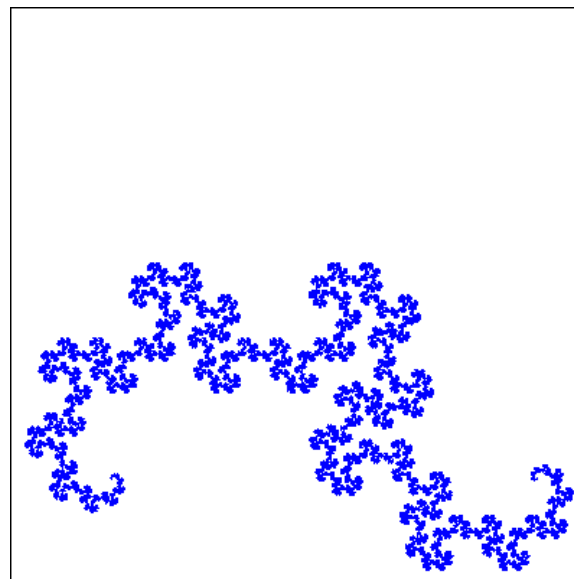
Golden dragon

- k の値を変えると、相似次元が ϕ を保ったまま曲線が変化

k が3.0から1.0まで



k が1.0から0.1まで



Golden dragon (k が3.0から1.0まで)

<https://www.youtube.com/watch?v=rCVAI3a1Eo8>



Golden dragon (k が1.0から0.1まで)

<https://www.youtube.com/watch?v=dWXz4k3L96E>



Golden dragon

- k の値を変えた時のGolden dragon曲線 (動画へのリンク)

Golden dragon ($k=2$)

<https://www.youtube.com/watch?v=zqwHXD6h90A>



Golden dragon ($k=1$)

<https://www.youtube.com/watch?v=QPmpaW-Oy2E>



Golden dragon ($k=r$)

<https://www.youtube.com/watch?v=5C1KwbqIYZs>



Golden dragon ($k=1/\phi$)

<https://www.youtube.com/watch?v=yy8FwXRcuNE>



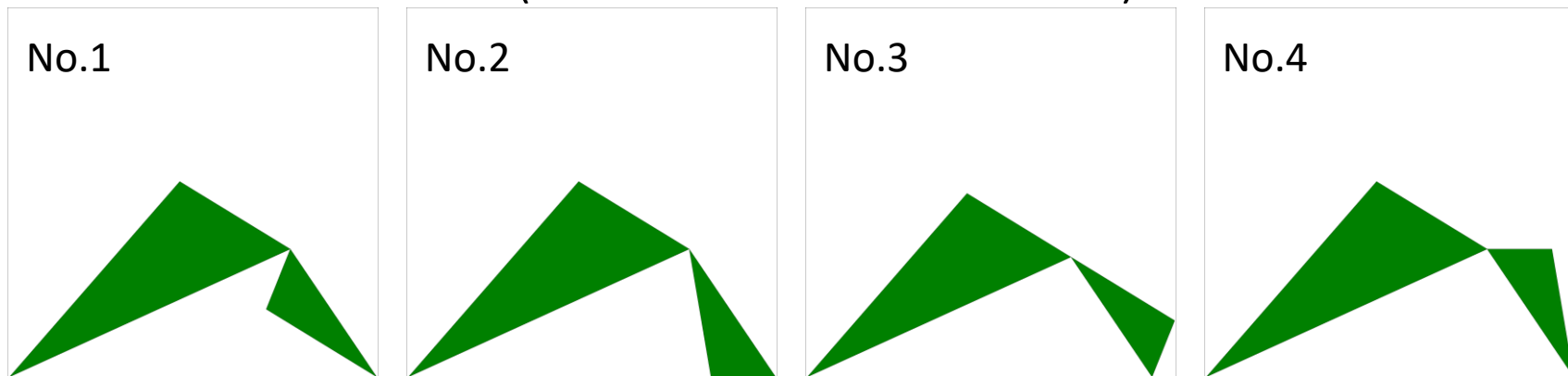
Golden dragon ($k=1/2$)

<https://www.youtube.com/watch?v=onx5XLuFPoY>



Golden dragon

- 4つのバリエーション (これまで述べた曲線はNo.1)



No.1

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kr \cos \psi & -kr \sin \psi \\ kr \sin \psi & -kr \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No.2

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kr \cos \psi & -kr \sin \psi \\ -kr \sin \psi & -kr \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - kr \cos \psi \\ kr \sin \psi \end{pmatrix}$$

No.3

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kr \cos \psi & kr \sin \psi \\ -kr \sin \psi & kr \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - kr \cos \psi \\ kr \sin \psi \end{pmatrix}$$

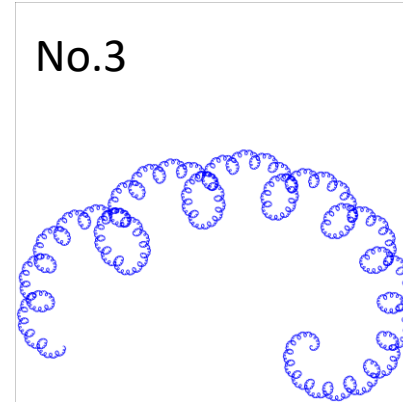
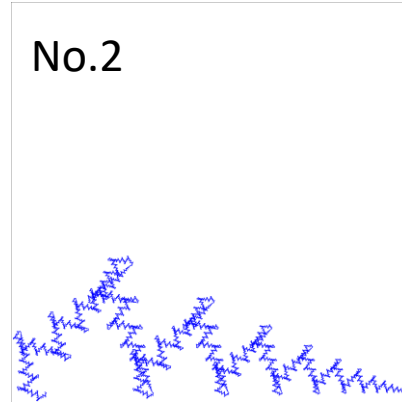
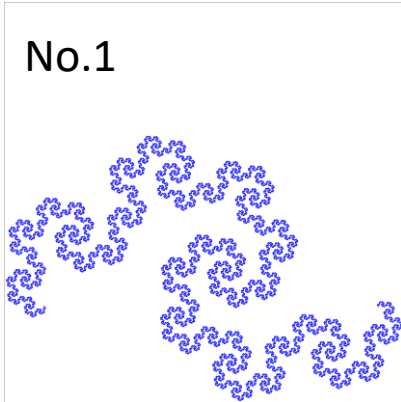
No.4

$$F_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

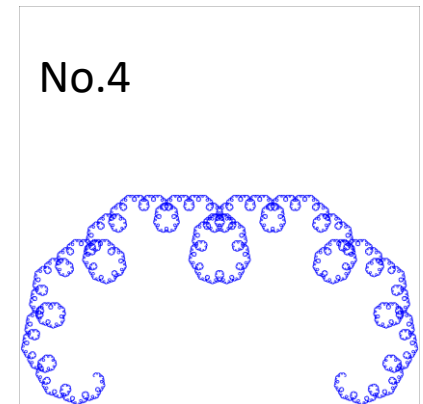
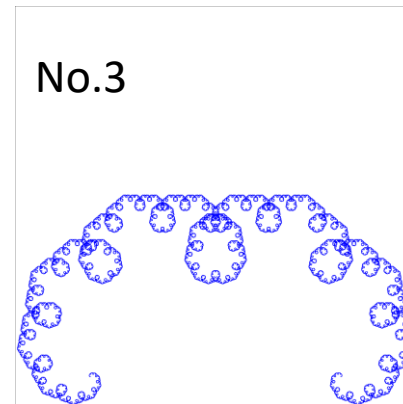
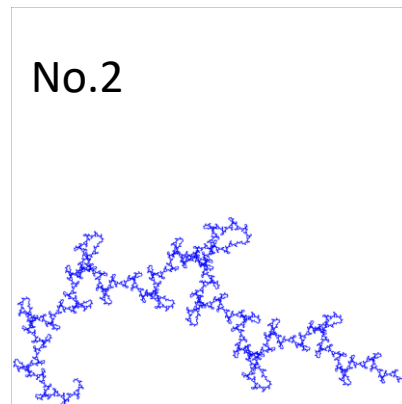
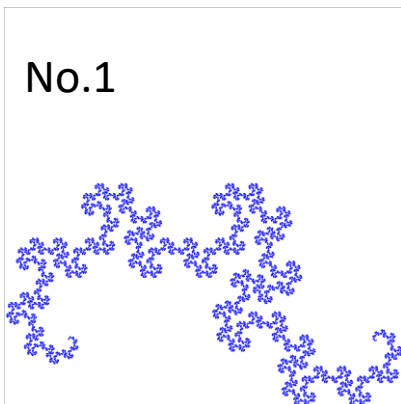
$$F_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kr \cos \psi & kr \sin \psi \\ kr \sin \psi & kr \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Golden dragon

- $k=2$ の場合

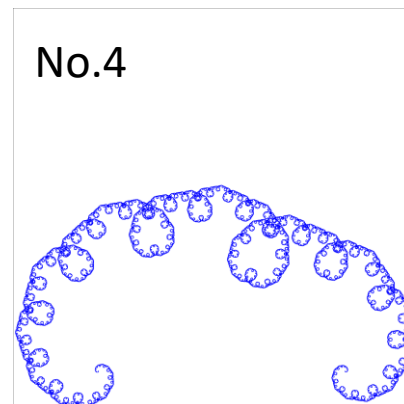
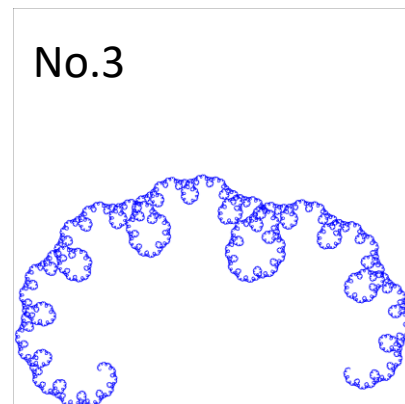
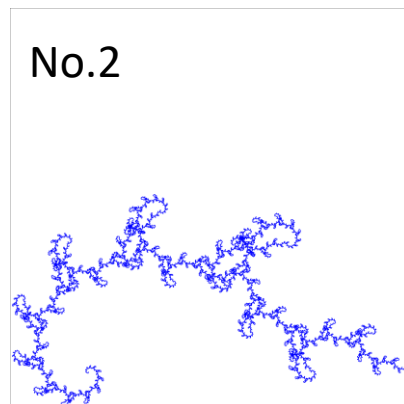
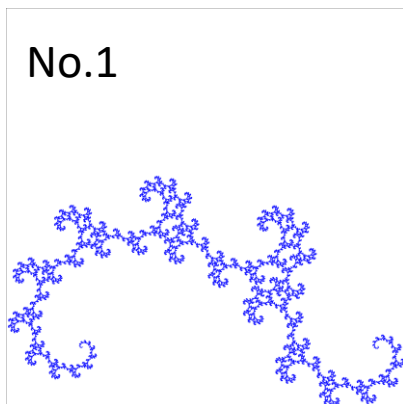


- $k=1$ の場合

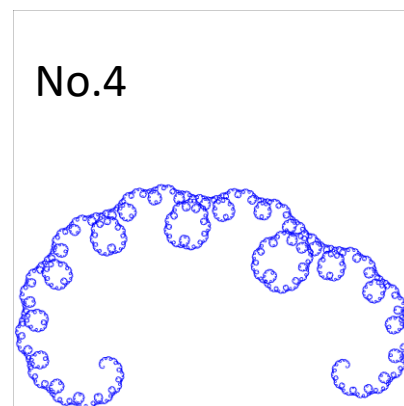
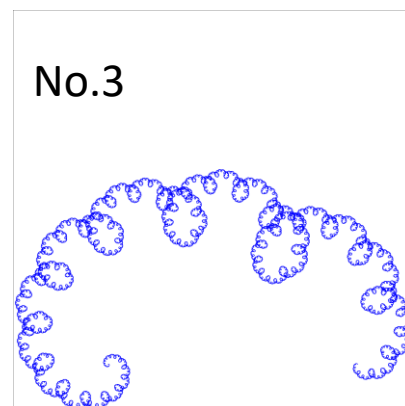
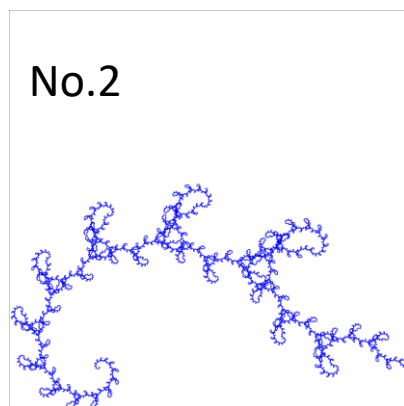
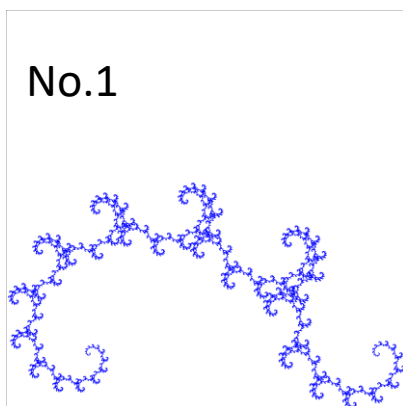


Golden dragon

- $k=r$ の場合

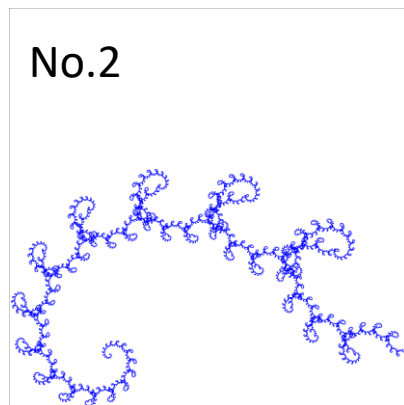
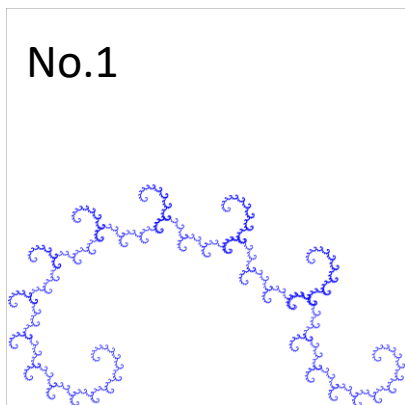


- $k=1/\phi$ の場合



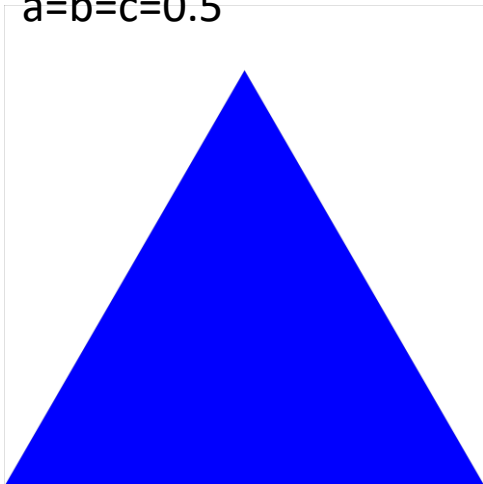
Golden dragon

- $k=1/2$ の場合



SierpinskiのGasket

$a=b=c=0.5$

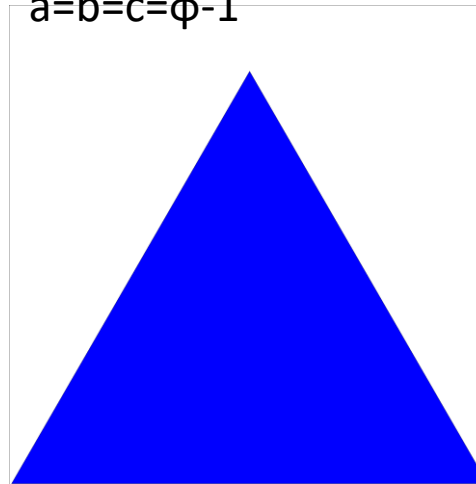


相似次元

$$3 \left(\sqrt{1/2(1 - 1/2)} \right)^d = 1$$

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

$a=b=c=\phi-1$



相似次元

$$3 \left(\sqrt{2\phi - 3} \right)^d = 1$$

$$d = \frac{-2 \log 3}{\log (2\phi - 3)} \approx 1.522$$

SierpinskiのGasket($a=b=c=0.5$)

<https://www.youtube.com/watch?v=IcCIWNY2dAo>



SierpinskiのGasket($a=b=c=\phi-1$)

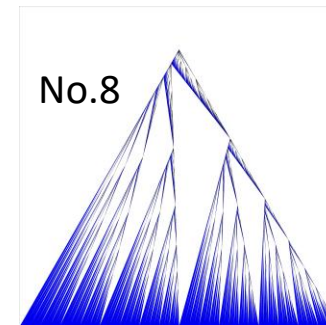
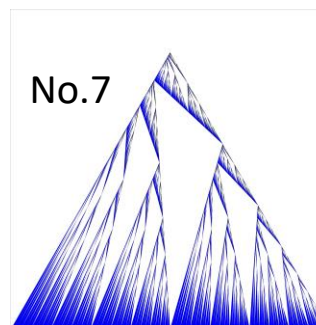
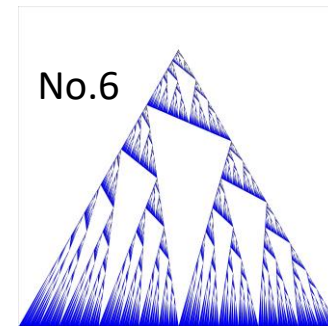
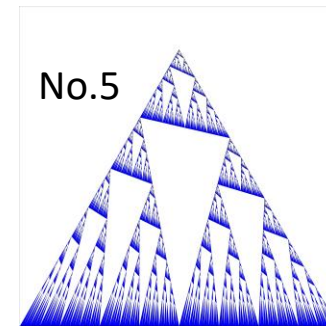
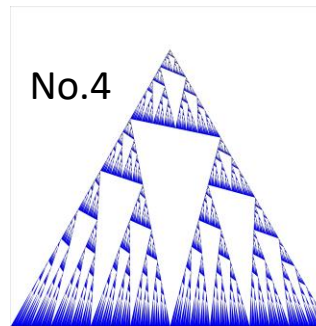
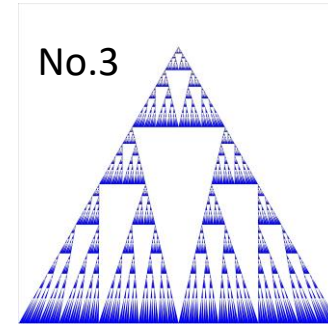
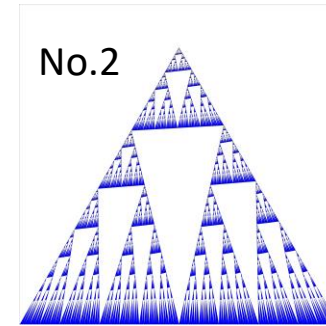
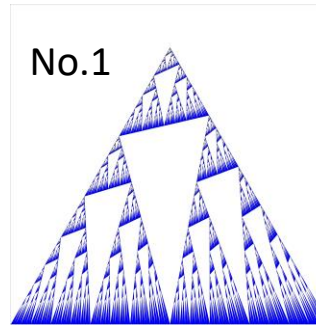
<https://www.youtube.com/watch?v=JPRmpTea3d0>



SierpinskiのGasket

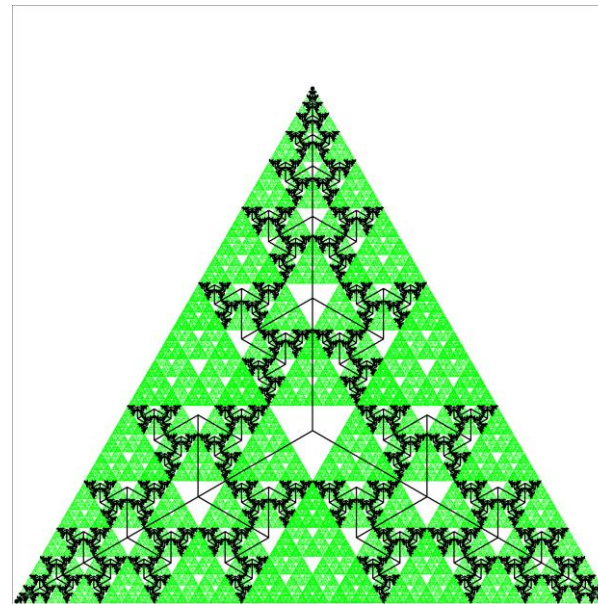
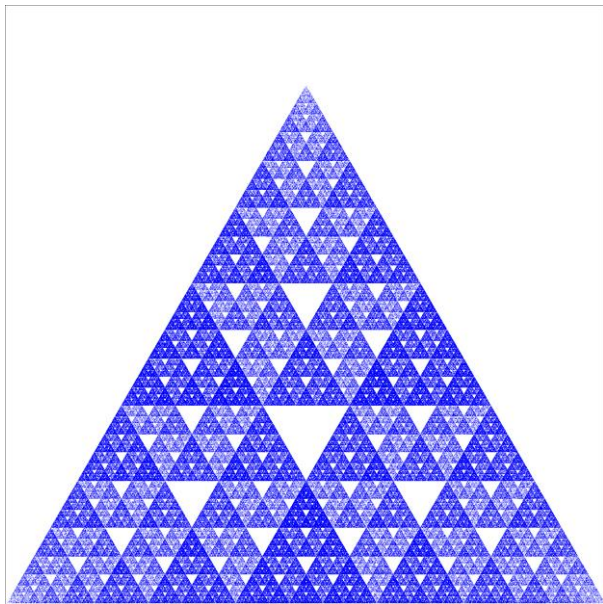
- 相似次元 d が近似的に ϕ となる a, b, c の例

No.	a	b	c
1	0.50000	0.75500	0.31986
2	0.50000	0.71900	0.29981
3	0.50000	0.70905	0.29095
4	0.50000	0.68200	0.24968
5	0.50000	0.68000	0.24463
6	0.50000	0.66890	0.19922
7	0.50000	0.66920	0.10048
8	0.50000	0.67850	0.05006



Golden Gasket

- SierpinskiのGasketに類似した図形



120度のFractal treeに関連している

IFSのAffine縮小写像のパラメータ

	a	b	c	d	e	f
F_1	$\phi-1$	0	0	$\phi-1$	0	0
F_2	$\phi-1$	0	0	$\phi-1$	$2-\phi$	0
F_3	$\phi-1$	0	0	$\phi-1$	$1-\phi/2$	$(2-\phi) \times \sin(\pi/3)$

オーバーレイしたL-systemの図形のパラメータ

角度：120

ステップサイズ変化：0.61803398874989

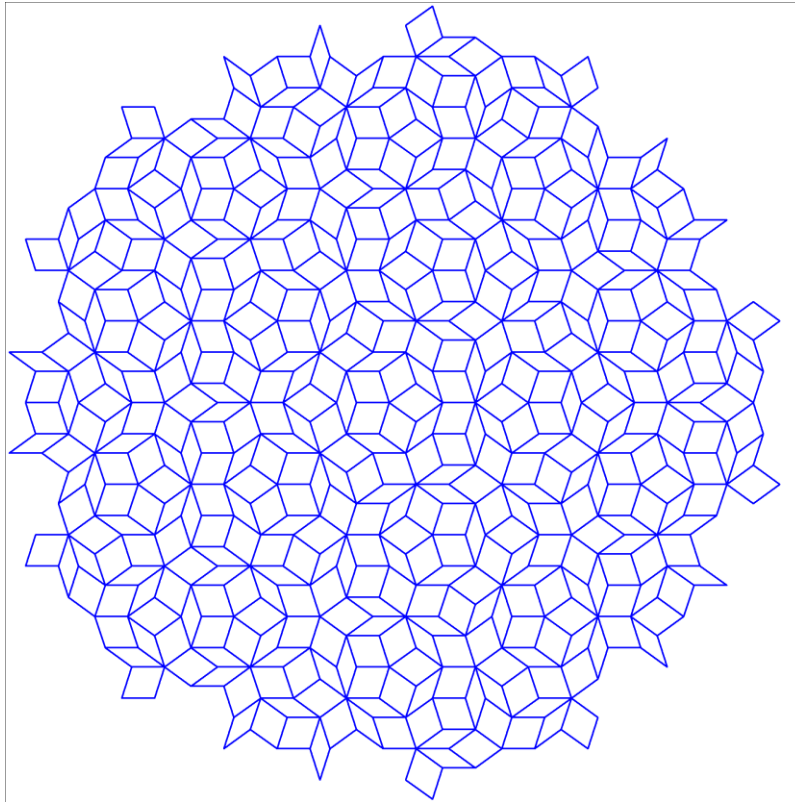
初期規則：[x]+[x]+[x]

生成ルール1：x=|[+f][-f]x

生成ルール2：f=|[+f][-f]

L-systemによる様々な図形

- L-systemを用いた様々な図形を示す。黄金比と関係があるパターンも多い。



```
No.1 Penrose.txt - メモ帳
ファイル(F) 編集(E) 書式(O) 表示(V) ヘルプ(H)
No.1 Penrose
角度: 36
ステップサイズ変化: 1.0
初期規則: [X]++[X]++[X]++[X]++[X]
生成ルール1: W=YF+ZF----XF[-YF----WF]++
生成ルール2: X=+YF--ZF[---WF--XF]+
生成ルール3: Y=-WF++XF[+++YF++ZF]-
生成ルール4: Z=-YF+++WF[+ZF+++XF]--XF
生成ルール5: F=
生成ルール6:
生成ルール7:
生成ルール8:
```

L-systemによる様々な図形

<https://www.youtube.com/watch?v=x4k08bQpNC8>

<https://www.youtube.com/watch?v=tli2oBr-uGI>



最後に

- 黄金比と関係のあるフラクタル図形の作成
 - IFS、L-systemのソフトウェア(Windows版)を作成した。
 - YouTubeにチャンネルを作り、動画にまとめてアップロードした。動画の一覧はこのページ下のリンク・QRコード参照。
- フラクタル図形作成の難しい点
 - 描きたい図形のパラメータをいかに定めるか。
- ソフトウェアの公開
 - 今回作成した以外の図形も含め、ある程度まとまったら、ソフトウェアと図形のパラメータをセットで公開する予定。

動画一覧

<https://www.youtube.com/channel/UCqJYbhZg6PmVemXibUqWzZw/videos>



参考文献

- 山口昌哉、カオスとフラクタル入門、放送大学教育振興会、1992, ISBN 4-595-56791-X
- Hans Lauwerier著、西川利男訳、初めてのフラクタル 数学とプログラミング、丸善、1996, ISBN 4-621-04200-9
- 瀬上季代絵、CによるフラクタルCG、サイエンス社、1993, ISBN 4-7819-0674-5
- M.F.Barnsley, Fractals Everywhere: New Edition (Dover Books on Mathematics), Dover, 2012, ISBN 978-0486488707
- G.W.Flake, The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation, Bradford Books / MIT Press, 2000, ISBN 0-262-56127-1, 978-0262561273
- P.Prusinkiewicz, A.Lindenmayer, The Algorithmic Beauty of Plants, Springer-Verlag, ISBN 0-387-97297-8
- P.Prusinkiewicz, J.Hanan, Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants, Springer-Verlag, ISBN 3-540-97092-4
- T.D.Taylor, Excursions Through a Forest of Golden Fractal Trees, pp.35-50, in D.Gulick, J.Scott Eds., The Beauty of Fractals: Six Different Views, MAA, 2010, ISBN 978-0-88385-186-9, 978-0-88385-971-1
- T.D.Taylor, Finding Gold in the Forest: Self-Contacting Symmetric Binary Fractal Trees and the Golden Ratio, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.529.5481&rep=rep1&type=pdf>
- N.C.Blecke, K.Fleming, G.W.Grossman, Finding Fibonacci in a Fractal, in F.T.Howard ed., Applications of Fibonacci Numbers, Vol.9 Kluwer Academic Publ., 2004, ISBN 1-4020-1938-6
- D.Broomhead, J.Montaldi, N.Sidorov, Golden Gaskets: Variations on the Sierpiński Sieve, [arXiv:math/0309304v1](https://arxiv.org/abs/math/0309304v1)
- T.Taylor, Multinacci Numbers, Golden Gaskets and Fractal Trees, Connections Involving the Golden Ratio and Fractals, <https://people.stfx.ca/ttaylor/research.html>
- T.Taylor, Golden Fractal Trees, <https://archive.bridgesmathart.org/2007/bridges2007-181.pdf>
- L.Vepstas, A Gallery of de Rham Curves, http://linas.org/math/de_Rham.pdf
- M.Peruggia, Discrete Iterated Functions Systems, A K Peters/CRC Pr., 1993, ISBN 978-1568810157
- L.Riddle, Creating Symmetric Fractals pp.45-53, in M.Pitici ed., The Best Writing on Mathematics 2017, Princeton Univ. Pr., 2018, ISBN 978-0-691-17863-9
- A.S.Posamentier, I.Lehmann, The Glorious Golden Ratio, Prometheus Books, 2012, ISBN 978-1-61614-423-4

オイラー型超完全数について

飯高 茂 (学習院大学名誉教授), 梶田光 (あざみ野第一小学校6年)

2020年8月21日

1 はじめに

¹完全数の歴史から始める.

紀元前3世紀に書かれたユークリッドの数学原論には次のことが書かれている.
1から始めて2倍すると2. さらに2倍すると4. これを繰り返すと 2^n . これらを足した $q = 1 + 2 + \dots + 2^n$ が素数のとき, $a = 2^n q$ は完全数になる.

このユークリッドの言説を読み解くことにしよう.

記号を導入する. 自然数 a の約数(a も入れる)の総和を $\sigma(a)$ と書く. $\sigma(2^n) = 1 + 2 + \dots + 2^n$ になるが, これは2を公比とする等比数列の和であり等比数列の公式によれば, $\sigma(2^n) = 2^{n+1} - 1$.

また, $q = 2^{n+1} - 1$ が素数なら $\sigma(q) = 1 + q$. さらに $\sigma(a)$ の乗法公式を使うと $a = 2^n q$ に対して, 2と q は互いに素なので

$\sigma(a) = \sigma(2^n)\sigma(q) = (2^{n+1} - 1)(q + 1) = (2^{n+1} - 1)q + 2^{n+1} - 1$ となる.

$(2^{n+1} - 1)q = 2 * 2^n q - q = 2a - q$. さらに $q = 2^{n+1} - 1$ を思い出せば

$\sigma(a) = (2^{n+1} - 1)q + 2^{n+1} - 1 = 2a - q + 2^{n+1} - 1 = 2a$ によって, $\sigma(a) = 2a$.

かくしてできた式 $\sigma(a) = 2a$ を完全数の定義式と考える.

定義 1 $\sigma(a) = 2a$ を満たす数 a を完全数という.

$q = 2^{n+1} - 1$ が素数のとき, $a = 2^n q$ は完全数になるが, この逆が成立するか. これが奇数完全数の問題で2000年以上解けないという意味で数学界最大の難問である.

1.1 ねずみ算

等比数列の公式 $\sigma(2^n) = 2^{n+1} - 1$ を古代ギリシャ人は知っていたことになる.

¹1から8項まで飯高, 9項以下は梶田による

なぜ 2,000 以上昔にこのような公式を知っていたのだろうか. ところで, 江戸時代の話であるが, 碁盤の目に 1 粒の米を置き、次の目に 2 粒、4 粒、8 粒 と次々おいていく. これ見た殿様が積み上げた米をみなあげよう、と約束する.

やっていると総数 $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ という膨大な数の米になって約束した殿様が困惑した話がある.

多分類似した話が古代エジプト, 古代ギリシャにもあって, 倍々の計算をして総数を計算すると奇数になり, 1 をさらに加えると再び 2 べきの数になる. このことは面白い事実として知る人ぞ知ることがらであったろう, と私は想像する.

2020 年の 3 月に放映された E テレの番組で, 5 歳の少年が倍々の計算を繰り返す過程でこの公式を発見したことが紹介されていた. 私はこれを見て, 古代ギリシャの数学者がこの公式を帰納的に発見したことを確信した.

1.2 概完全数

完全数 a が偶数なら, $a = 2^n q$, ($q = 2^{n+1} - 1$: 素数) と書けることはオイラーにより証明された.

完全数 a は $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たすので $\sigma(a) - 2a = -2, -1, 1, 2$ を満たす a についても求めてみた.

$\sigma(a) - 2a = 1$ となる a は存在しないと予想されている.

表 1: $-m = \sigma(a) - 2a$ の完全数

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$-m$	a	素因数分解	$\sigma(a)$	$-m$
3	[3]	4	-2	6	[2, 3]	12	0
10	[2, 5]	18	-2	28	[2 ² , 7]	56	0
136	[2 ³ , 17]	270	-2	496	[2 ⁴ , 31]	992	0
2	[2]	3	-1	20	[2 ² , 5]	42	2
4	[2 ²]	7	-1	104	[2 ³ , 13]	210	2
8	[2 ³]	15	-1	464	[2 ⁴ , 29]	930	2
16	[2 ⁴]	31	-1	650	[2, 5 ² , 13]	1302	2

$\sigma(a) - 2a = -1$ を満たす a を概完全数という. 概完全数は 2^e と書けるといのが概完全数予想である. しかし証明はできていない.

1.3 平行移動した完全数

完全数を平行移動してみよう.

一般に, 与えられた整数 m に対し, $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす a を平行移動 m の完全数という.

完全数のときと同様に解の素因数分解が $2^e Q$, (Q :素数) と書けるとき A 型解という.

$\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす a が A 型解 $2^e Q$, (Q :素数) とする.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $a = 2^e Q$ が $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たすなら

$-m = \sigma(a) - 2a = \sigma(2^e Q) - 2a = N(Q+1) - 2a = NQ + N - 2a$ になる.

$NQ + N = 2a - Q + N$ なので $-m = NQ + N - 2a = -Q + N = -Q + 2^{e+1} - 1$.

よって, $Q = 2^{e+1} - 1 + m$ となりこれは素数と仮定されている.

$m = 0$ なら $Q = 2^{e+1} - 1$ となりこれはメルセンヌ素数とよばれ $m = 2$ なら $Q = 2^{e+1} + 1$ となりフェルマ素数と呼ばれる.

2 超完全数

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e$ とおくと $q = \sigma(a) + m$ を満たす.

$\sigma(q) = q + 1 = 2^{e+1} + m = 2a + m$ となる.

q の代わりに A と書くことにすると次式が得られる

$$A = \sigma(a) + m$$

$\sigma(A) = 2a + m$.

この式を並べて a, A の連立方程式とみる.

定義 2

$$\begin{cases} A = \sigma(a) + m \\ \sigma(A) = 2a + m \end{cases} \quad (1)$$

を満たすとき, a は 平行移動 m の超完全数 (*super perfect number*), A はそのパートナーと呼ばれる.

$m = 0$ のとき $A = \sigma(a)$, $\sigma(A) = 2a$ を満たすので A を消去して $\sigma(\sigma(a)) = 2a$ を得る.

$\sigma(\sigma(a))$ を $\sigma^2(a)$ と書くことにすると, $\sigma^2(a) = 2a$.

$\sigma^2(a) = 2a$ を満たす a をスリヤナリヤナの超完全数 (Suryanaryana's super perfect number) という.

スリヤナリヤナは $\sigma^2(a) = 2a$ を満たす a が偶数なら $a = 2^e$, $q = 2a - 1$ は素数で $\alpha = 2^e q$ は完全数となることを示した. 真に驚くべき結果である.

完全数の素数部分の特徴付けを考えたい.

完全数 $2^e q$ において $a = q$ とおくと $\sigma^2(a) = 2a + 1$ を満たす.

なぜなら, $\sigma(a) = a + 1 = 2^{n+1}, \sigma(2^{n+1}) = \sigma^2(a) = 2^{n+2} - 1 = 2 * 2^{n+1} - 1 = 2(a + 1) - 1 = 2a + 1$.

逆に $\sigma^2(a) = 2a + 1$ を満たす a は ($\sigma(a)$ が偶数なら) 完全数の素数部分となることを証明したい. これは私にとって夢の予想.

3 平行移動の真正完全数と真正超完全数

平行移動 m の真正完全数 α とは $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ の解でしかも A 型解となるもの
と考える.

平行移動 m の真正超完全数とそのパートナ A とは連立方程式 $A = \sigma(a) = a + m, \sigma(A) = 2a + m$ の解 (超完全数) でさらに a を 2 べきとする.

このときそのパートナ A は素数になり, aA が真正完全数 α となる.

次節で定義する平行移動 m のオイラー I 型 真正超完全数 α とは $A = 2\varphi(a) + 1 + m, \varphi(A) = a + m$ を満たし, かつ a は 2 べきとなる場合である.

このときそのパートナ A は素数になる.

4 オイラー型 超完全数

自然数 a より小さく, a と互いに素な数の個数を $\varphi(a)$ と書く. $\varphi(a)$ を関数とみて, オイラー関数という.

$\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ だが $a > 2$ なら $\varphi(a)$ は偶数.

$\text{co}\varphi(a) = a - \varphi(a)$ をオイラー余関数という. $\text{co}\varphi(1) = 0$ だが $a > 1$ なら $\text{co}\varphi(a) > 0$.

$\text{co}\varphi(a) = 1$ が成り立つのは a が素数の場合だけ.

a, b が互いに素な自然数のとき $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ が成り立ちこれをオイラー関数の乗法性という.

$\sigma(a)$ の代わりに $\varphi(a)$ を用いて完全数 または 超完全数 に類似のモノをつくるときオイラー型 完全数 または オイラー型 超完全数 と言う.

オイラー型の方がやさしくて扱いやすい. ここに初学者が試みやすい素材が多くある.

整数 m と $e > 0$ について $A = 2^e + 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e$ とおくととき $A = a + 1 + m$ が成り立つ.

一方 $2\varphi(a) = 2^e = a$ が成り立つ.

ゆえに $A = 2\varphi(a) + 1 + m$ が成り立ちこれは素数なので, $\varphi(A) = A - 1$.

一方 $A - 1 = a + m$ なので $\varphi(A) = a + m$

ここで出来た等式 $A = 2\varphi(a) + 1 + m, \varphi(A) = a + m$ のみを取り上げ次の概念を導入する.

定義 3

$$\begin{cases} A = 2\varphi(a) + 1 + m \\ \varphi(A) = a + m \end{cases} \quad (2)$$

を満たすとき a を 平行移動 m のオイラー I 型の超完全数, A はそのパートナーと呼ぶ.

$m = 0$ のときの解 a は $\varphi(2\varphi(a) + 1) = a$ を満たす.

表 2: Euler I 型 超完全数, ($m = -2, 0, 2$)

$m = -2$		$m = 0$		$m = 2$	
a	A	a	A	a	A
$4 = 2^2$	3	$2 = 2$	3	$2 = 2$	5
$8 = 2^3$	7	$4 = 2^2$	5	$4 = 2^2$	7
$32 = 2^5$	31	$16 = 2^4$	17	$8 = 2^3$	11
$128 = 2^7$	127	$256 = 2^8$	257	$16 = 2^4$	19

$m = -2$ なら, A はメルセンヌ素数, $m = 0$ なら, A はフェルマ素数.

私は Euler I 型 超完全数を定義しパソコンで計算してみたら、このような結果が出たので歓喜の声をあげた。

簡単な結果から始める。

命題 1 a を 平行移動 m のオイラー型の超完全数, A をそのパートナーとする.
 a が 2 べき, すなわち $a = 2^e$ とするとき, A は素数. この逆も成り立つ.

Proof $a = 2^e$ のとき, $2\varphi(a) = a$ なのでこれを定義式に代入する.

$A = 2\varphi(a) + 1 + m = a + 1 + m, \varphi(A) = a + m = A - 1$ なので $\varphi(A) = A - 1$.

よって, $A = 2^e + 1 + m$ は素数.

逆の成立は明らか. **q.e.d.**

注意 1 $A = 2$ と仮定すると, 定義式より

$$2 = A = 2\varphi(a) + 1 + m, 1 = \varphi(A) = a + m$$

$1 = 2\varphi(a) + m, 1 = \varphi(A) = a + m$ により, $2\varphi(a) = a$ によって, $a = 2^\varepsilon$. したがって $1 = \varphi(A) = a + m = 2^\varepsilon + m$.

よって, $m = 1 - 2^\varepsilon$.

i). $\varepsilon = 1. m = -1, a = 2, A = 2$

ii). $\varepsilon = 2. m = -3, a = 4, A = 2$

iii). $\varepsilon = 3. m = -7, a = 8, A = 2$

a が 2 べきのとき, A は素数は示された.

a が素数のとき, A の素因数分解はいろいろある. 具体例を検討すると, $A = 2^e Q$: ($Q > 2$: 素数) と書けることが多い.

a が素数 p , $A = 2^e Q$: ($Q > 2$: 素数) と仮定して調べてみよう.

$$2^e Q = A = 2\varphi(a) + 1 + m = 2p - 1 + m, \varphi(A) = \varphi(2^e Q) = 2^{e-1}(Q - 1) = p + m$$

なので

$$\text{右の式を 2 倍すると } 2^e(Q - 1) = 2^e Q - 2^e = 2p + 2m.$$

$$2^e Q = 2p - 1 + m = 2p + 2m - 1 - m = 2^e Q - 2^e - 1 + m \text{ になるので } m = -2^e - 1.$$

実は, 平行移動 m のオイラー I 型 真正完全数は定義できない.

そこで, 平行移動 m のオイラー I 型 真正超完全数 α とそのパートナ A の積 αA をもって, 平行移動 m のオイラー I 型 真正完全数と呼ぶことにする.

5 一般論の展開

i). m は偶数. $m = 2\mu$ とすると, $a = \varphi(A) - 2\mu$ ($A > 2$) は偶数.

よって $a = 2^e L$, ($2 \nmid L$).

$$A = 2\varphi(a) + 1 + m = 2^e \varphi(L) + 1 + 2\mu, \varphi(A) = a + m = 2^e L + 2\mu$$

左の式から右の式を引いて, オイラーの余関数を用いると

$$1 = \text{co}\varphi(A) + 2^e(\text{co}\varphi(L)).$$

ゆえに $\text{co}\varphi(A) = 1$, (A :素数), $2^e(\text{co}\varphi(L)) = 0$; $L = 1, a = 2^e$. $A = 2^e + 1 + m$: 素数.

$a = 2^e, A = 2^e + 1 + m$: 素数, という結論を得ると良く分かった気になる. しかし, 与えられた偶数 m に関して $A = 2^e + 1 + m$ が素数になるような e は無限にあるか, という素朴な問いかけに答えることは難しい.

表 3: Euler 型 超完全数 $A = 2^e + 1 + m, m = 2\mu$: 素数

$m = -2$		メルセンヌ素数	
a		$A = 2^e - 1$	
4	2^2	3	3
8	2^3	7	7
32	2^5	31	31
128	2^7	127	127
$m = 0$		フェルマ素数	
a		$A = 2^e + 1$	
2	2	3	3
4	2^2	5	5
16	2^4	17	17
256	2^8	257	257
$m = 2$			
a		$A = 2^e + 3$	
2	2	5	5
4	2^2	7	7
8	2^3	11	11
16	2^4	19	19
64	2^6	67	67
128	2^7	131	131

$m = -2$ のとき, $A = 2^e + 1 + m = 2^e - 1$ は素数なのでこれはメルセンヌ素数.
 $a_0 = a/2 = 2^{e-1}$ とおけば

$\alpha = a_0 A$ は元祖完全数になる. 2 べきが超完全数 a になるならそのパートナ A は素数でこれはメルセンヌ素数であり, aA が元祖完全数の 2 倍になっている.

オイラー関数を使う完全数の一般化では, 超完全数が 2 べきのときパートナが素数なのでこの積が完全数と思うのが 1 つの考え方であろう.

5.1 $m = -3, -5$ の場合

m : 奇数で正なら Euler 型 超完全数の解はない.

しかし奇数でも負の場合を計算すると Euler 型に超完全数 双子素数とその一般化がでて来た. これは不思議なことだ.

私は自分の数学人生でもかって味わったことのない感動につつまれた. 証明は無理だろうと思った. 双子素数は無限にあることすら証明できていない扱いに困難な存在と考えていたからである.

表 4: Euler 型 超完全数, $m = -3, -5$

$m = -3 \quad (p = q + 2)$		$m = -5 \quad (p = 2q + 3)$	
$a = p$	$A = 2q$	$a = p$	$A = 4q$
$4 = 2^2$	$2 = 2$	$9 = 3^2$	$8 = 2^3$
$5 = 5$	$6 = 2 * 3$	$13 = 13$	$20 = 2^2 * 5$
$7 = 7$	$10 = 2 * 5$	$17 = 17$	$28 = 2^2 * 7$
$13 = 13$	$22 = 2 * 11$	$29 = 29$	$52 = 2^2 * 13$
$19 = 19$	$34 = 2 * 17$	$37 = 37$	$68 = 2^2 * 17$
$31 = 31$	$58 = 2 * 29$	$41 = 41$	$76 = 2^2 * 19$

$m = -3$, ($a > 4$ なら $a = p$ は素数), $q = p + 2$ (双子素数).

$m = -5$, ($q > 9$ なら $a = p$: 素数), $A > 8$ なら $A = 4q$: 素数, $p = 2q + 3$ 超双子素数.

私はその当時小学4年生の高橋洋翔君から、「良い問題を出して下さい」と言われていたので、「オイラー関数は知っているね。」と言って「 $m = -3$ のときのオイラー型超完全数をしらべて下さい」という意味のはがきを出した.

2日後に「双子素数ができます. 証明もできます」という返書が届いた. 私は現代数学史を目前でみているような気がした.

6 m は奇数の場合

m は奇数. $m = 2\mu - 1$ とする.

オイラー I 型超完全数の定義式 $A = 2\varphi(a) + 1 + m, \varphi(A) = a + m$ に入れる.
 $A = 2\varphi(a) + 1 + m = 2\varphi(a) + 2\mu$ は偶数になるので $A = 2^e L, (2 \nmid L)$ と書ける.
 $A = 2^e L = 2\varphi(a) + 2\mu$ を 2 で割ると

$$2^{e-1}L = \varphi(a) + \mu \quad (3)$$

定義式の後半部より $\varphi(A) = 2^{e-1}\varphi(L) = a + m = a + 2\mu - 1$.
ゆえに

$$2^{e-1}\varphi(L) = a + 2\mu - 1 \quad (4)$$

2 つの式を引いて

$$1 - \mu = \text{co}\varphi(a) + 2^{e-1}\text{co}\varphi(L). \quad (5)$$

これを, $1 - \mu$ のオイラー余関数への加法分解式という. 一般にこれ解くことは困難と思われる.

a が素数 p の場合なら $\text{co}\varphi(a) = 1$ なので, まずこれを仮定する.

$$-\mu = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L).$$

ついでに L が素数 q を仮定する. $\text{co}\varphi(L) = \text{co}\varphi(q) = 1$ なので $-\mu = 2^{e-1}$.

このとき, $m = 2\mu - 1 = -1 - 2^e$.

$L = q, A = 2^e q = 2\varphi(a) + 1 + m = 2p - 1 + m = 2(p + \mu - 1)$ によって,

$$2^{e-1}q = p + \mu - 1.$$

このことは高橋洋翔君が最初に注目し, 私宛の私信で述べた.

当時小学生の高橋洋翔君はこの場合超双子素数が無限にあることを確信した.

双子素数が無限にある場合を一般化して日本数学教育学会 100 周年企画で研究発表した.

$2^{e-1}q + 1 - \mu = p$ は一般化され次の定義ができる.

$a > 0, b$ を定数として (a, b) :互いに素, $a + b \equiv 1 \pmod{2}$ を満たすとき $q, p = aq + b$ がともに素数なら (p, q) を超双子素数 (super twin primes) という.

超完全数から生まれた双子素数の一般化なので超双子素数ということになった.

とりあえず $m = 2\mu - 1 = -1 - 2^e$ の場合に限って結果を述べる.

$\mu = -1$ のとき $m = -3$ なので $1 - \mu = 2$ により $2 = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + \text{co}\varphi(a)$.
 これは 2 を $2^{e-1}\text{co}\varphi(L)$ と $\text{co}\varphi(a)$ の和に加法分解することである. 結果として
 $2 = 1 + 1, 2 = 0 + 2$ の 2通りの余関数への加法分解を基礎に考える.

i). $2 = 1 + 1$ のとき

$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 1, \text{co}\varphi(a) = 1$ になるので, $e - 1 = 0$. L と a はともに素数. $L = q$ と
 $a = p$ と書き換える. $A = 2q$ で $A = 2\varphi(a) + 1 + m$ により $2q = A = 2\varphi(p) + 1 + m =$
 $2(p - 1) - 2$. 2 で割って $q = p - 2$. (p, q) は双子素数.

ii). $2 = 0 + 2$ のとき

$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 0, \text{co}\varphi(a) = 2$. これより $L = 1, A = 2^e; a = 4, A = 2$.

7 $m = -1 - 2^\varepsilon$ の場合

$m = 2\mu - 1 = -1 - 2^\varepsilon, \mu = -2^{\varepsilon-1}$ となる.

7.1 $m = -5$

$\mu = -2$ になるので

$$1 - \mu = 3 = \text{co}\varphi(a) + 2^{e-1}\text{co}\varphi(L).$$

i). 3 の加法分解が $3 = 1 + 2$.

$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 2^{e-1} = 2$. により $e = 2, L = q$ 素数.

ii). 3 の加法分解が $3 = 3 + 0$. $\text{co}\varphi(a) = 3, 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 0$. によって, $a = 9, L =$
 $1, A = 2^e$.

$\varphi(A) = 2^{e-1} = a + m = a + 2\mu - 1 = 9 - 5 = 4; e - 1 = 2, A = 8$. ゆえに,
 $a = 3^2, A = 2^3$

表によると, a が素数でないとき $a = 5^2, A = 2^3$.

7.2 $m = -9$ のとき

なら $\mu = -4$ なので 5 の加法分解式は次の通り.

$$\text{co}\varphi(a) + 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 5.$$

a が素数でない場合は $5 = 5 + 0$ と加法分解する場合であり, $\text{co}\varphi(a) = 5, \text{co}\varphi(L) = 0$.
 ただし証明は未完成.

表 5: Euler 型 超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -5$			
9	3^2	8	2^3
13	13	20	$2^2 * 5$
17	17	28	$2^2 * 7$
29	29	52	$2^2 * 13$
37	37	68	$2^2 * 17$
41	41	76	$2^2 * 19$
61	61	116	$2^2 * 29$
$m = -9$			
17	17	24	$2^3 * 3$
25	5^2	32	2^5
73	73	136	$2^3 * 17$
97	97	184	$2^3 * 23$
193	193	376	$2^3 * 47$

表 6: Euler 型 超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -17$			
21	$3 * 7$	8	2^3
25	5^2	24	$2^3 * 3$
49	7^2	68	$2^2 * 17$
97	97	176	$2^4 * 11$
113	113	208	$2^4 * 13$
193	193	368	$2^4 * 23$
241	241	464	$2^4 * 29$
257	257	496	$2^4 * 31$
337	337	656	$2^4 * 41$

$m = -17$ のとき a が合成数なら $a = 3 * 7, 5^2, 7^2$ と 3 通りある.

7.3 $m = -33$ の場合

$m = -33$ のとき a が合成数なら $a = 5 * 13, 17^2$ の 2 通りある.

表 7: Euler I 型 超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -33$			
65	$5 * 13$	64	2^6
97	97	160	$2^5 * 5$
193	193	352	$2^5 * 11$
289	17^2	512	2^9
673	673	1,312	$2^5 * 41$
769	769	1,504	$2^5 * 47$
1153	1,153	2,272	$2^5 * 71$
2113	2,113	4,192	$2^5 * 131$
2689	2,689	5,344	$2^5 * 167$
3169	3,169	6,304	$2^5 * 197$

7.4 $m = -65$ の場合

表 8: Euler I 型 超完全数

$m = -65$			
a	素因数分解	A	素因数分解
193	193	320	$2^6 * 5$
209	$11 * 19$	296	$2^3 * 37$
257	257	448	$2^6 * 7$
449	449	832	$2^6 * 13$
577	577	1,088	$2^6 * 17$
641	641	1,216	$2^6 * 19$
769	769	1,472	$2^6 * 23$
961	31^2	1,796	$2^2 * 449$
1217	1,217	2,368	$2^6 * 37$
1409	1,409	2,752	$2^6 * 43$
2689	2,689	5,312	$2^6 * 83$

$m = -65$ のとき a が合成数なら $a = 11 * 19, 31^2$ の 2 通り.

$$A = 2\varphi(a) + 2\mu = 2\varphi(a) - 32.$$

$A = 2^e L$ と書くとき

$$33 = 1 - \mu = \text{co}\varphi(a) + 2^{e-1} \text{co}\varphi(L).$$

1. $33 = 1 + 32$.

$$\text{co}\varphi(a) = 1, 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 32; 2^{e-1} = 32 = 2^5, \text{co}\varphi(L) = 1.$$

$L = q$; 素数, $e = 6, a = p$: 素数. $A = 2^6 q, a = p$.

2. $33 = 29 + 4$. $\text{co}\varphi(a) = 29, 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 4; e = 3, \text{co}\varphi(L) = 1; L = q, A = 2^3 q. \text{co}\varphi(a) = 29; a = 11 * 19,$

3. $33 = 31 + 2$.

$$\text{co}\varphi(a) = 31; a = 31^2, 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 2; e = 2, \text{co}\varphi(L) = 1, A = 2L = 2q.$$

$$A = 2\varphi(a) + 2\mu = 2 * 30 * 31 - 2 * 32 = 4 * 449. q = 449, A = 2^2 * q.$$

これらの証明は依然未完成.

$m = -1 - 2^\varepsilon$ の場合に限定して考える.

連立定義方程式は $A = 2\varphi(a) + 1 + m, \varphi(A) = a + m$ なので

$$A = 2\varphi(a) - 2^\varepsilon, \varphi(A) = a - 1 - 2^\varepsilon$$

A : 偶数になり, $A = 2^e L, (L : \text{奇数})$: とおく.

$$2^{e-1}L = \varphi(a) - 2^{\varepsilon-1},$$

$$\varphi(A) = 2^{e-1}\varphi(L) = a - 1 - 2^\varepsilon.$$

$$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = -\text{co}\varphi(a) + 1 + 2^{\varepsilon-1}$$

7.5 $a = p$ の場合

i). $a = p$ (:素数) と仮定する.

$$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 2^{\varepsilon-1}.$$

ゆえに,

$$\text{co}\varphi(L) = 2^{\varepsilon-e}.$$

L : 奇数なので 梶田の結果によると, $e = \varsigma$.

$a = Q^2$ の場合

ii). $a = Q^2, (Q : \text{素数})$ と仮定する.

$$2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + Q = 2^{\varepsilon-1} + 1 = 1 - \mu$$

7.6 $m = -17$ の場合

$m = -17$ とすると $\mu = -8, \varepsilon = 4$.

$$9 = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + Q$$

$9 > Q$ なので $Q = 7, 5, 3$

1) $Q = 7$ のとき, $2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 2; \varphi(Q^2) = 42, e = 2, \text{co}\varphi(L) = 1, L = q$.
 $2^{e-1}L = 2q = 42 - 2^{\varepsilon-1} = 34, q = 17; A = 4 * 17 = 68$.

2) $Q = 5$ のとき, $9 = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + Q = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + 5. 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 4; \varphi(Q^2) = 20, e = 3, \text{co}\varphi(L) = 1, L = q$
 $2^{e-1}L = 4q = 20 - 2^{\varepsilon-1} = 12, q = 3; A = 24$

3) $Q = 3$ のとき, $9 = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + Q = 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) + 3. 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 6; \varphi(Q^2) = 6, e = 2, \text{co}\varphi(L) = 3, L = 9$
 $A = 2^2 * 9 = 36, \varphi(A) = 12 = a - 1 - 2^\varepsilon = 9 - 1 - 2^4 < 0; \text{矛盾}$.

8 平方解

$m = -89$ のとき興味ある素数の平方解が出て来た.

表 9: Euler 型 超完全数

$m = -89$			
217	$7 * 31$	272	$2^4 * 17$
377	$13 * 29$	584	$2^3 * 73$
1849	43^2	3,524	$2^2 * 881$

素数の平方 $a = p^2$ 解は注目する価値がある. しかも例を調べるとパートナー $A = 2^e q$ になる場合が多い.

そこで $a = p^2, A = 2^e q$ となる解を探してみよう.

定義式 $A = 2\varphi(a) + 1 + m, \varphi(A) = a + m$ に代入すると

$$A = 2^e q = 2\varphi(a) + 1 + m = 2p\bar{p} + m + 1$$

$\varphi(A) = 2^{e-1}(q-1) = p^2 + m$ により 2 倍して

$$2^e(q-1) = 2^e q - 2^e = 2p^2 + 2m.$$

$2^e q = 2p\bar{p} + m + 1$ を代入すると $2p(p-1) + m + 1 - 2^e = 2p^2 + 2m.$

$$-2p + 1 - 2^e = m.$$

m は負の奇数なので $m = 2\mu - 1$ とおくと $p = 1 - \mu - 2^{e-1}$ が素数になる, e を選ぶ. このような e は一般には無数にある.

さらに $2^{e-1}q = p\bar{p} + \mu$ が成り立つという厳しい条件がある.

表 10: Euler 型 I 超完全数, 平方解 1

a		A	
$m = -65$			
961	31^2	1796	$2^2 * 449$
$m = -63$			
64	2^6	2	2
$m = -57$			
81	3^4	52	$2^2 * 13$
$m = -49$			
289	17^2	496	$2^4 * 31$
529	23^2	964	$2^2 * 241$
$m = -41$			
169	13^2	272	$2^4 * 17$
$m = -37$			
289	17^2	508	$2^2 * 127$
$m = -33$			
289	17^2	512	2^9
$m = -31$			
49	7^2	54	$2 * 3^3$

表 11: Euler 型 I 超完全数, 平方解 2

a		A	
$m = -29$			
169	13^2	284	$2^2 * 71$
$m = -17$			
25	5^2	24	$2^3 * 3$
49	7^2	68	$2^2 * 17$
$m = -15$			
16	2^4	2	2
$m = -13$			
25	5^2	28	$2^2 * 7$
$m = -9$			
25	5^2	32	2^5
$m = -7$			
9	3^2	6	$2 * 3$
$m = -5$			
9	3^2	8	2^3
$m = -3$			
4	2^2	2	2

9 オイラー II 型メルセンヌ超完全数の定義

最近飯高先生により, オイラー型メルセンヌ超完全数という概念が定義された.

まず $a = p \cdot 2^e + m + 1 \in \text{prime}(p : \text{odd prime})$ とする.

このとき $\varphi(a) = p \cdot 2^e + m$ なので $A = \varphi(a) - m = p \cdot 2^e$ とおくと

$\varphi(A) = (p-1)2^{e-1}$ より $2p\varphi(A) = (p-1) \cdot 2^e p = (p-1)(a-m-1)$ である.

先生はこうしてできた連立方程式

$$\begin{cases} A = \varphi(a) - m \\ 2p\varphi(A) = (p-1)(a-m-1) \end{cases} \quad (6)$$

を平行移動 m , 乗数 p 付きオイラー型メルセンヌ超完全数と定義された.

今回は a の置き方は同じであるが, $A = 2^e$ とする.

このとき a と A の間で成り立つ連立方程式を考える.

まず $\varphi(a) - m = p \cdot 2^e$ より $pA = \varphi(a) - m$ である.

また $\varphi(A) = 2^{e-1}$ より $2p\varphi(A) = a - m - 1$ となる.

こうしてできた連立方程式

$$\begin{cases} pA = \varphi(a) - m \\ 2p\varphi(A) = a - m - 1 \end{cases} \quad (7)$$

をオイラー II 型メルセンヌ超完全数の定義式とする.

10 $p : \text{odd}, p > 1$ の場合

以下 $p : \text{odd}, p > 1$ と仮定する.

10.1 $m \geq 0$ の場合

定理 1 m を奇数, $m > 1$ とするとき平行移動 m , 乗数 p 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数はない.

Proof

まず定義式から $pA = \varphi(a) - m, 2p\varphi(A) = a - m - 1$ となる.

$m : \text{odd}$ より $m+1 : \text{even}$ であるから $a : \text{even}$ が成り立つ.

したがって $a = 2^e L (e > 0, L : \text{odd})$ と書いてこれを定義式に代入すると

$pA = 2^{e-1} \varphi(L) - m, 2p\varphi(A) = 2^e L - m - 1$ となる.

両辺を 2 倍すると

$2pA = 2^e \varphi(L) - 2m, 2p\varphi(A) = 2^e L - m - 1$ が得られる.

ここで $m > 1$ より $2m > m + 1$, よって $-2m < -m - 1$.

また $\varphi(L) \leq L$.

この2つを用いて $2pA = 2^e\varphi(L) - 2m$ を変形していく.

まず $\varphi(L) \leq L$ から $2pA \leq 2^eL - 2m$.

つぎに $-2m < -m - 1$ から $2pA < 2^eL - m - 1$.

$2p\varphi(A) = 2^eL - m - 1$ より $2pA < 2p\varphi(A)$ である.

ゆえに $A < \varphi(A)$ となって矛盾.

以上より定理は成り立つ.

q.e.d.

定理 2 $m = 1$ とするとき平行移動 m , 乗数 p 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は $a = 2p + 2 = 2^e (e > 0)$, $A = 1$ のみである.

Proof

まず定義式から $pA = \varphi(a) - 1$, $2p\varphi(A) = a - 2$ である.

a : even であるから $a = 2^eL (e > 0, L: \text{odd})$ と書いてこれを代入すると

$pA = 2^{e-1}\varphi(L) - 1$, $2p\varphi(A) = 2^eL - 2$ が得られる.

両辺を2倍すると

$2pA = 2^e\varphi(L) - 2$, $2p\varphi(A) = 2^eL - 2$ となる.

$\varphi(L) \leq L$ (等号成立は $L = 1$ のとき) より

$2pA \leq 2^eL - 2 = 2p\varphi(A)$, つまり $A \leq \varphi(A)$ が成り立つ.

よって等号が成立して $L = 1$, $A = 1$ と決まる.

$L = 1$ より $a = 2^e$ なので $p = 2^{e-1} - 1$, $2p = 2^e - 2$ である.

したがって $a = 2p + 2 = 2^e (e > 0)$, $A = 1$ となる.

q.e.d.

定理 3 m : even, $\gcd(m + 1, p) = 1$ のとき $a = p \cdot 2^e + m + 1 \in \text{prime}$, $A = 2^e$ が解になる.

また $\gcd(m + 1, p) \neq 1$ のとき解は存在しない.

Proof

まず定義式から $pA = \varphi(a) - m$, $2p\varphi(A) = a - m - 1$ である.

$a = 1$ とすると $2p\varphi(A) = -m \leq 0$ となり矛盾.

$a = 2$ としても $2p\varphi(A) = 1 - m$ であるが $2p > 1$ より矛盾.

よって $\varphi(a)$: even であるから A : even である.

したがって $A = 2^eL (e > 0, L: \text{odd})$ と書いてこれを定義式に代入すると

$p \cdot 2^eL = \varphi(a) - m$, $p \cdot 2^e\varphi(L) = a - m - 1$ が得られる.

$a > 1$ より $a - 1 \geq \varphi(a)$ (等号成立は $a \in \text{prime}$ のとき) より

$p \cdot 2^e\varphi(L) \geq \varphi(a) - m = p \cdot 2^eL$ となる.

$\varphi(L) \geq L$ より等号が成立して $a \in \text{prime}$, $A = 2^e$ となる.

$p \cdot 2^e\varphi(L) = a - m - 1$ より $a = p \cdot 2^e + m + 1 \in \text{prime}$ が得られる.

$\gcd(m+1, p) = 1$ のとき $a = p \cdot 2^e + m + 1 \in \text{prime}$, $A = 2^e$ が解となる.

ここで $\gcd(m+1, p) = k \neq 1$ とする.

このとき a は k の倍数なので $a = k \in \text{prime}$ と決まる.

しかし $a = p \cdot 2^e + m + 1 = k \left(\frac{p}{k} 2^e + \frac{m+1}{k} \right)$ で $e > 0$ より $2^e > 1$ であるから $a > k$ となる.

これは $a = k$ に反する. **q.e.d.**

10.1.1 $p = 3$ の場合

以下は $1 \leq a \leq 10000000$ の範囲の解である.

ただし $A > 0$ とする.

またこのとき方程式は $3A = \varphi(a) - m$, $6\varphi(A) = a - m - 1$ となる. 定理 1, 2, 3 を用いると, $m \geq 0$, $p = 3$ かつ

- $m \equiv 0, 4 \pmod{6}$ のとき $a = 3 \cdot 2^e + m + 1 \in \text{prime}$, $A = 2^e$
- $m \equiv 1 \pmod{6}$ のとき $a = 8$, $A = 1$, $m = 1$
- $m \equiv 2, 3, 5 \pmod{6}$ のとき解は存在しない

ことが分かる. m が負の場合について考える.

10.2 $m < 0$ の場合

文字が負だと分かりにくいので $m - m$ と置きなおす.

よってここから $m > 0$ と仮定する.

このとき定義式は $pA = \varphi(a) + m$, $2p\varphi(A) = a + m - 1$ になる.

平行移動が正の場合と違い, このときは解がたくさん出てくる.

$p = 3$ のときは $m \geq 27$ になると D 型解も出てくる.

$m : \text{odd}$ の場合は解の種類が多く扱いにくいのでまず $m : \text{even}$ の場合を考える.

定理 4 $m : \text{even}$ のとき平行移動 $-m$, 乗数 p 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は $a = p \cdot 2^e - m + 1$, $A = 2^e$ が解になる.

Proof

まず定義式から $pA = \varphi(a) + m$, $2p\varphi(A) = a + m - 1$ である.

$a = 1$ のとき $pA = m + 1$, $2p\varphi(A) = m$, つまり $pA = 2p\varphi(A) + 1$ となるが $2p\varphi(A) + 1$ は p で割り切れないので矛盾.

$a = 2$ のとき $pA = m + 1$, $2p\varphi(A) = m + 1$, となるが $2p\varphi(A) : \text{even}$ なので $m : \text{odd}$ となり $m : \text{even}$ であることに反する.

よって $\varphi(a) : \text{even}$ であるから $A : \text{even}$ となり $A = 2^e L$ ($e > 0$, $L : \text{odd}$) と書ける.

これを定義式に代入すると

$$p \cdot 2^e L = \varphi(a) + m, p \cdot 2^e \varphi(L) = a + m - 1 \text{ となる.}$$

ここで $\varphi(a) \leq a - 1$ (等号成立は $a \in \text{prime}$ のとき) より

$$p \cdot 2^e \varphi(L) \geq \varphi(a) + m = p \cdot 2^e L$$

よって等号が成立して $a \in \text{prime}, L = 1$ となる.

$L = 1$ より $A = 2^e$ である.

また $p \cdot 2^e \varphi(L) = a + m - 1$ より $a = p \cdot 2^e - m + 1 \in \text{prime}$ となる.

q.e.d.

まず $m = 1$ とする.

命題 2 平行移動 -1 , 乗数 p 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は存在しない.

Proof

まず定義式から $pA = \varphi(a) + 1, 2p\varphi(A) = a$ である.

$p\varphi(A)$ は自然数なので $a = 2^e L (e > 0, L : \text{odd})$ と書いてこれを定義式に代入すると

$$pA = 2^{e-1} \varphi(L) + 1, 2p\varphi(A) = 2^e L \text{ が得られる.}$$

両辺を 2 倍すると

$$2pA = 2^e \varphi(L) + 2, 2p\varphi(A) = 2^e L \text{ となる.}$$

よって $2p\text{co}\varphi(A) + 2^e \text{co}\varphi(L) = 2$, つまり $p\text{co}\varphi(A) + 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) = 1$ が成り立つ.

このとき $e = 1$ であることがわかる.

したがって $p\text{co}\varphi(A) + \text{co}\varphi(L) = 1$ となる.

ここで $p > 1$ より $\text{co}\varphi(A) = 0, \text{co}\varphi(L) = 1$, つまり $A = 1, L \in \text{prime}$ である.

よって $a = 2q (q : \text{odd prime}), A = 1$ と書ける.

しかし $pA = \varphi(a) + 1$ より $p = q + 1$ となるがこれは $p : \text{odd}, q : \text{odd}$ に矛盾.

以上より平行移動 -1 , 乗数 p 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は存在しないことが示された.

q.e.d.

この証明を途中まで一般化する.

定義式から $pA = \varphi(a) + m, 2p\varphi(A) = a + m - 1$ である.

$m : \text{odd}$ より $m - 1 : \text{even}$ であるから $a = 2^e L$ と書いてこれを定義式に代入すると

$$pA = 2^{e-1} \varphi(L) + m, 2p\varphi(A) = 2^e L + m - 1 \text{ が得られる.}$$

両辺を 2 倍すると

$$2pA = 2^e \varphi(L) + 2m, 2p\varphi(A) = 2^e L + m - 1 \text{ となる.}$$

よって $2p\text{co}\varphi(A) + 2^e \text{co}\varphi(L) = m + 1$, つまり $p\text{co}\varphi(A) + 2^{e-1} \text{co}\varphi(L) = \frac{m+1}{2}$ が成り立つ.

この式変形を以降用いる. これにより色々な解が出てくることがわかる.

10.2.1 $p = 3$ の場合

ここから様々な m に対して解の考察・証明を行う。

命題 3 平行移動 -3 , 乗数 3 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は存在しない。

Proof

上の式変形により $3\text{co}\varphi(A) + 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 2$ である。

ここで $\text{co}\varphi(A) > 0$ とすると $2^{e-1}\text{co}\varphi(L) < 0$ より矛盾。

よって $3\text{co}\varphi(A) = 0$, つまり $A = 1$ である。

このとき $2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 2$ なので $2^{e-1} = 2$, $\text{co}\varphi(L) = 1$ または $2^{e-1} = 1$, $\text{co}\varphi(L) = 2$ である。

つまり $e = 2, L \in \text{prime}$ または $e = 1, L = 4$ となるが $L : \text{odd}$ なので $e = 2, L \in \text{prime}$ である。

したがって $a = 4p (p : \text{odd prime}), A = 1$ が解となる。

しかし定義式から $3A = \varphi(a) + 3$ なので $3 = 2p - 2 + 3 = 2p - 1$ より $p = 2$ となるがこれは $p : \text{odd}$ に矛盾。

以上より平行移動 -3 , 乗数 3 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は存在しない。

q.e.d.

$m = 5$ の場合を証明するには次の補題が必要になる。

補題 1 $a - \varphi(a) = 3 \iff a = 9$

Proof

まず $a = 1$ は $1 - 1 \neq 3$ より解ではない。

同様に $a = 2$ も $2 - 1 \neq 3$ より解ではない。

よって $\varphi(a) : \text{even}$ なので $a : \text{odd}$ となる。

$a > 1$ より a は少なくとも 1 つの素因数を持つので $a = p^e L (p : \text{odd prime}, e > 0, L : \text{odd}, p \nmid L)$ と書ける。

これを $a - \varphi(a) = 3$ に代入すると

$$p^e L - p^{e-1}(p-1)\varphi(L) = 3$$

$$p^{e-1}(pL - (p-1)\varphi(L)) = 3$$

ここで $e = 1$ または $e = 2, p = 3$ である。

(1) $e = 1$ の場合

このとき $pL - (p-1)\varphi(L) = 3$ である。

展開すると $p\text{co}\varphi(L) + \varphi(L) = 3$ である。

$p : \text{odd prime}$ より $p \geq 3$ なので $3\text{co}\varphi(L) + \varphi(L) \leq 3$ となる。

これを満たす L は 1 のみであるが $L = 1$ とすると $p - (p-1) = 1 = 3$ となって矛盾。

(2) $e = 2, p = 3$ の場合

このとき $3L - 2\varphi(L) = 1$ である.

同様に $3\text{co}\varphi(L) + \varphi(L) = 1$ なので $L = 1$ となる.

したがって $a = 3^2 \cdot 1 = 9$ が得られる.

また $a = 9$ とすると $9 - \varphi(9) = 9 - 6 = 3$ となって解である.

以上より補題は真である.

q.e.d.

命題 4 平行移動 -5 , 乗数 3 付きのオイラー II 型メルセンヌ超完全数は $a = 2^e, A = \frac{2^{e-1} + 5}{3} \in \text{prime}$ である.

Proof

上の式変形により $3\text{co}\varphi(A) + 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 3$ である.

$\text{co}\varphi(A) > 2$ とすると $2^{e-1}\text{co}\varphi(L) < 0$ より矛盾.

よって $\text{co}\varphi(A) = 0, 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 3$ または $\text{co}\varphi(A) = 1, 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 0$ が解となる.

$\text{co}\varphi(A) = 0$ のとき $A = 1$ である.

また $\text{co}\varphi(L) = 3$ なので補題 1 より $L = 9$ である.

このとき $e = 1$ なので $A = 1, a = 18$ が得られるがこれは定義式を満たさない.

次に $\text{co}\varphi(A) = 1, 2^{e-1}\text{co}\varphi(L) = 0$ の場合を考える.

$\text{co}\varphi(A) = 1, \text{co}\varphi(L) = 0$ より $A = p \in \text{prime}, a = 2^e$ と書ける.

定義式より $3A = \varphi(a) + 5, 6\varphi(A) = a + 4$ なので $3p = 2^{e-1} + 5, 6p - 6 = a + 4$, つまり

$$p = \frac{2^{e-1} + 5}{3} \text{ となる.}$$

以上より命題は真である.

q.e.d.

参考文献

- [1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V),(VI)』, 現代数学社, 2016, 2017, 2018, 2020.
- [2] 飯高 茂, 梶田光, 乗数付きオイラー型完全数日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, vol.26,1 (2020) 1-14.
- [3] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.
- [4] Antal Bege and Kinga Fogarasi, Generalized perfect numbers, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73-82.

- [5] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1

フィボナッチ数とチェビシエフ多項式

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

《Richard Guy (1916–2020) の霊に捧ぐ》

今回は、もっと知られて良い「チェビシエフ多項式」についての基本を説明します。19世紀のロシアで活躍した鬼才チェビシエフ (Pafnuty Lvovich Chebyshev ; 1821–1894) はペテルスブルグ学派の創始者です。三角関数に深く関連した「チェビシエフ多項式」は次のように定義されます。

$T_n(x) = \cos(n\theta)$, (ただし $x = \cos\theta$) : 第1種のチェビシエフ多項式,

$U_n(x) = \sin((n+1)\theta) / \sin\theta$, ($x = \cos\theta$) : 第2種のチェビシエフ多項式.

以下ではフィボナッチ数に便利な、次の「変形チェビシエフ多項式」を使います。

定義 変形チェビシエフ多項式を次のように定義する：

$$t_n(x) = 2T_n(x/2), \quad u_n(x) = U_n(x/2), \quad (\text{ただし } x = \cos\theta).$$

和 \rightarrow 積公式 $\cos\{(n+2)\theta\} + \cos(n\theta) = 2 \cdot \cos\{(n+1)\theta\} \cos\theta$ などより,

$$t_{n+2}(x) + t_n(x) = x t_{n+1}(x), \quad u_{n+2}(x) + u_n(x) = x u_{n+1}(x)$$

が成り立ち、漸化式に直すと次のようになります. :

$$t_{n+2}(x) = x t_{n+1}(x) - t_n(x), \quad t_0(x) = 2, \quad t_1(x) = x.$$

$$u_{n+2}(x) = x u_{n+1}(x) - u_n(x), \quad u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = x.$$

これにより $t_n(x)$ と $u_n(x)$ は最高次の係数が1のn次多項式になります。例えば $t_2(x) = x^2 - 2$, $t_3(x) = x^3 - 3x$, $u_2(x) = x^2 - 1$, $u_3(x) = x^3 - 2x$ などです。ところで $x = \cos\theta$ という定義から、 $|x| \leq 1$ に限定されているように見えますが、定義域は複素数全体、 \mathbf{C} とします。考えにくかったらオイラーの公式を思い出して下さい。

(オイラーの公式) $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ($i = \sqrt{-1}$). $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}$, $\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}$.

これは「指数関数」と「三角関数」の結びつきを明確にした素晴らしい公式です。これより,

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, \quad \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$$

となります。ここで θ を複素数にとれば、 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ も複素数全体を動きます。例えば、 $\cos i = (e^{-1} + e^1)/2 = (e^2 + 1)/2e > 1.543$ です。また $\cos(\pi/2 + 5i) = -(e^{10} - 1)i/2e^5$ なので、 $t_n(-(e^{10} - 1)i/2e^5) = 2 \cdot \cos(n\pi/2 + 5ni) = \{1 + (-1)^n \cdot e^{10n}\} i^n / e^{5n} e^{10}$ と求まります。さらに $u_n(-(e^{10} - 1)i/2e^5) = (-i)^n \{e^{10n+10} + (-1)^n\}$ などのように計算できます。計算は大変でも、何とか値が求められることが分かりました。

さて、差 \rightarrow 積公式 $\cos\{(n+2)\theta\} - \cos(n\theta) = -2 \cdot \sin\{(n+1)\theta\} \sin\theta$ と,

$\sin\{(n+3)\theta\} - \sin\{(n+1)\theta\} = 2 \cdot \cos\{(n+2)\theta\} \sin\theta$ を使うと,

$$t_{n+2}(x) - t_n(x) = (x^2 - 4)u_n(x), \quad u_{n+2}(x) - u_n(x) = t_{n+2}(x).$$

が成り立ちます. またオイラーの公式から, 次の**定理**が得られます:

$$t_n(x) = \left[\frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}}{2} \right]^n + \left[\frac{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}}}{2} \right]^n,$$

$$u_n(x) = (1/\sqrt{x^2 - 4}) \left[\left\{ \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}}{2} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}}}{2} \right\}^{n+1} \right],$$

これで準備が整いました. この式で $x = i$ (虚数単位) とおくと,

$$t_n(i) = \left[\frac{\sqrt{i + \sqrt{-5}}}{2} \right]^n + \left[\frac{\sqrt{i - \sqrt{-5}}}{2} \right]^n = i^n (\alpha^n + \beta^n) = i^n L_n,$$

となって, リュカ数が現れます. 同様にして, $u_n(i) = i^n F_{n+1}$ が分かります.

次に $x = \sqrt{5}$ とおくと, $t_n(\sqrt{5}) = \alpha^n + (-\beta)^n$, $u_n(\sqrt{5}) = \alpha^n - (-\beta)^n$ です.

この右辺は, n の偶数, 奇数によって, L_n と $\sqrt{5}F_n$ が出てきます. 正確に書くと,

$$u_{2n-1}(\sqrt{5}) = \tilde{F}_{2n}, \quad t_{2n-1}(\sqrt{5}) = \tilde{F}_{2n-1}; \quad u_{2n}(\sqrt{5}) = L_{2n+1}, \quad t_{2n}(\sqrt{5}) = L_{2n},$$

です. ただし, $\tilde{F}_n = \sqrt{5}F_n$ と書きました.

このように, x に色々な値を入れると, 様々なフィボナッチ数, リュカ数が得られるのです. この作業は結構楽しいので, 多くの人にもっと楽しんで貰えたら良いと思っています.

x に代入する値を $\tilde{F}_{2n-1} = \sqrt{5}F_{2n-1}$, $i\tilde{F}_{2n} = \sqrt{5} \cdot iF_{2n}$, L_{2n} , iL_{2n-1} とすると, 必ずフィボナッチ数, またはリュカ数が出てきます. もう少し先まで計算すると, 次のようになります:

$$u_{2n-1}(\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^{n-1} \tilde{F}_{4n} / 3, \quad t_{2n-1}(\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^{n-1} i \cdot \tilde{F}_{4n-2};$$

$$u_{2n}(\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^n L_{4n+2} / 3, \quad t_{2n}(\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^n L_{4n}.$$

$$u_{n-1}(3) = F_{2n}, \quad t_n(3) = L_{2n}.$$

$$u_{n-1}(4i) = i^{n-1} F_{3n} / 2, \quad t_n(4i) = i^n L_{3n}.$$

$$u_{n-1}(7) = F_{4n} / 3, \quad t_n(7) = L_{4n}.$$

$$u_{n-1}(11i) = i^{n-1} \tilde{F}_{5n} / 5, \quad t_n(11i) = i^n L_{5n}.$$

$$u_{2n}(3\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^n L_{8n+4} / 7, \quad t_{2n}(3\sqrt{5} \cdot i) = (-1)^n L_{8n}.$$

$$u_{2n-1}(3\sqrt{5} \cdot i) = i^{2n-1} \tilde{F}_{8n} / 7, \quad t_{2n-1}(3\sqrt{5} \cdot i) = i^{2n-1} \tilde{F}_{8n-4}.$$

$x = \overline{F}_{2n}$ と $x = i \overline{F}_{2n-1}$ のときだけ場合分けが必要になり, 少し面倒です.

ところで三角関数で定義されたチェビシエフ多項式ですが, はじめに見た通り 計算はとても厄介で, 三角関数との関係が明確ではありません. それを はっきりさせる「積の公式」があるので紹介します. 証明はしませんが, 次の**定理**です:

$$t_n(x) = \varepsilon_n(x) \cdot \prod_{1 \leq k \leq [n/2]} [x^2 - 2 \cdot \cos\{(2k-1)\pi/n\} - 2],$$

$$u_{n-1}(x) = \varepsilon_{n-1}(x) \cdot \prod_{1 \leq k \leq [(n-1)/2]} [x^2 - 2 \cdot \cos\{2k\pi/n\} - 2].$$

(ただし, $\varepsilon_n(x) = x$ (n が奇数), 1 (n が偶数),

[m] はガウス記号で, m を超えない最大の整数です.)

この定理から, フィボナッチ数とリュカ数の「積表現公式」が得られます.

$$F_n = \prod_{1 \leq k \leq [(n-1)/2]} [3 + 2 \cdot \cos(2k\pi/n)],$$

$$L_n = \prod_{1 \leq k \leq [n/2]} [3 + 2 \cdot \cos\{(2k-1)\pi/n\}],$$

私はとても美しい公式だと思います. ところで, 20 世紀の終わり近くになって, 三角関数の新しい関係式がいくつも見つかりました. オベイドやルングたちが棒のたわみとねじれを研究しているときに発見したものです. 例えば次のような公式です.

$$2^n \cdot \cos^{n+1} \theta = \cos(n+1)\theta + \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{n-k} \cdot \cos^{n-k} \theta \cdot \cos(k-1)\theta,$$

$$2^n \cdot \cos^{n+1} \theta \cdot \sin \theta = \sin(n+1)\theta + \sum_{2 \leq k \leq n} 2^{n-k} \cdot \cos^{n-k} \theta \cdot \sin(k-1)\theta,$$

変形チェビシエフ多項式の定義式と見比べて, 次の等式は明らかです.

$$x^{n+1} = t_{n+1}(x) + \sum_{1 \leq k \leq n} x^{n-k} \cdot t_{k-1}(x), \quad (n \geq 1),$$

$$x^n = u_n(x) + \sum_{2 \leq k \leq n} x^{n-k} \cdot u_{k-2}(x), \quad (n \geq 2).$$

先ほど求めた式から, 次々にフィボナッチ数とリュカ数の公式が出てきます. 例えば, $x=3$ とおけば (下式では $F_0=0$ なので番号を一つずらして) 次の公式になります:

$$3^{n+1} = L_{2n+2} + \sum_{1 \leq k \leq n} 3^{n-k} \cdot L_{2k-2},$$

$$3^n = F_{2n+2} + \sum_{2 \leq k \leq n} 3^{n-k} \cdot F_{2k-2}.$$

また, $x=4i$, および 7 とおけば, 少し整理して次の式が出てきます.

$$4^{n+1} = L_{3n+3} - \sum_{1 \leq k \leq n} 4^{n-k} \cdot L_{3k-3},$$

$$2 \cdot 4^n = F_{3n+3} + \sum_{2 \leq k \leq n} 4^{n-k} \cdot F_{3k-3}.$$

$$7^{n+1} = L_{4n+4} + \sum_{1 \leq k \leq n} 7^{n-k} \cdot L_{4k-4},$$

$$3 \cdot 7^n = F_{4n+4} + \sum_{2 \leq k \leq n} 7^{n-k} \cdot F_{4k-4}.$$

こんな調子で, 新しい公式が次々に得られるのです. フィボナッチ数を研究していて, 一番楽しい時間が突然やってくるのです. 以上にしたことを参考にして, 皆さん自身の公式を是非見つけ出して下さい.

この小論攷は, 拙著『フィボナッチ数の小宇宙』第 17 章にある「チェビシエフ多項式」の定義が, $T_n(x) = \cos(n\theta)$, (ただし $x = \cos \theta$) となっているのに, 定義域を複素数全体 \mathbf{C} で考えると分かり難い, という指摘に答えたい, という思いで書きました. まだ完全ではないかも知れませんが, 理解を深める一助になれば幸いです. (完)

複素貴金属比と四元数

中川 幸一*(埼玉大学)

第 18 回日本フィボナッチ協会研究集会
2020 年 8 月 21 日

概要

Fibonacci 数の隣接 2 項の比は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ という黄金比に収束することがよく知られている。また, Pell 数の隣接 2 項の比は $1+\sqrt{2}$ という白銀比に収束することも知られている。これらは共に貴金属比と呼ばれる数字の仲間でもある。また Bajorska-Harapińska, B Smoleń, R Witula らは, 四元数の基底上に発生した実多項式と数に関連する数列の族についての研究において, 準 Fibonacci 数を定義し四元数の関係式をいくつも発見した。本研究は貴金属比を拡張した複素貴金属比と四元数との関係を明らかにしたものである。

1 貴金属比

自然数 n に対して, 第 n 貴金属比 M_n は連分数を用いて

$$M_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \ddots}}}} = [n; n, n, n, n, \dots] = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

と表される。これより

$$M_n - \frac{1}{M_n} = n$$

という特徴を有する。また, 実数列 $\{M_{n,k}\}$ を

$$M_{n,0} = 0, \quad M_{n,1} = 1, \quad M_{n,k+2} = nM_{n,k+1} + M_{n,k}$$

という漸化式により定義すると, この数列の隣接 2 項の比の極限は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{n,k+1}}{M_{n,k}} = M_n$$

* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

となる。これより、 $\{M_{1,k}\}$ は Fibonacci 数、 $\{M_{2,k}\}$ は Pell 数となっていることが分かる。またいくつかの貴金属比については以下のようにになっている。

n	第 n 貴金属比	近似値	備考
1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	1.61803	黄金比
2	$1 + \sqrt{2}$	2.41421	白銀比
3	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	3.30278	青銅比
4	$2 + \sqrt{5}$	4.23607	
5	$\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$	5.19258	
6	$3 + \sqrt{10}$	6.16228	
7	$\frac{7 + \sqrt{53}}{2}$	7.14005	
8	$4 + \sqrt{17}$	8.12311	
9	$\frac{9 + \sqrt{85}}{2}$	9.10977	
10	$5 + \sqrt{26}$	10.0990	

2 四元数と準 Fibonacci 数

四元数 \mathbb{H} とは複素数を拡張した数体系であり、以下のように定義されたものである。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

また、実数列 $A_n(a, b, c, d)$, $B_n(a, b, c, d)$, $C_n(a, b, c, d)$, $D_n(a, b, c, d)$ を

$$(a + bi + cj + dk)^n = A_n(a, b, c, d) + B_n(a, b, c, d)i + C_n(a, b, c, d)j + D_n(a, b, c, d)k$$

と定義することにする。

Witula と Słota により $k \in \mathbb{N}/5\mathbb{N}$, $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\eta^5 = 1$ としたとき

$$(1 + \eta^k + \eta^{4k})^n = F_{n+1} + F_n(\eta^k + \eta^{4k}), \quad (1 + \eta^{2k} + \eta^{3k})^n = F_{n+1} + F_n(\eta^{2k} + \eta^{3k})$$

という関係式が発見された。さらに Bajorska-Harapińska, B Smoleń, R Witula らはこれらを拡張し、四元数との関係を見つけた。具体的には

- $A_n(1, 1, 2, 0) = A_n(1, 2, 1, 0) = A_n(1, 2, 0, 1) = A138229(n)$
- $B_n(1, 1, 2, 0) = A088139(n)$
- $A_n(1, 1, 0, 1) = A_n(1, 0, 1, -1) = A_n(1, 1, 0, -1) = A087455(n)$
- $B_n(1, 1, 0, 1) = A088137(n)$

などである。

3 複素貴金属比と四元数

ここで Lucas 数列について復習しておく.

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$

という漸化式を考える. この特性方程式は

$$x^2 = ax + b$$

と表され, 2 つの解を α, β とする. また, この特性方程式の判別式を $D = a^2 + 4b$ とする. このとき特性方程式の解は判別式 D を用いて $\frac{a \pm \sqrt{D}}{2}$ と表すことが出来る.

初期条件が $(x_0, x_1) = (0, 1)$ となる数列を $U_n(a, b)$ と表し, $(x_0, x_1) = (2, p)$ となる数列を $V_n(a, b)$ と表すことにする. このとき

$$U_n(a, b) = \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^n}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad V_n(a, b) = \alpha^n + \beta^n$$

となる. 特別な例として $U_n(1, 1)$ は Fibonacci 数, $V_n(1, 1)$ は Lucas 数であり $D = 5$ となる. $U_n(2, 1)$ は Pell 数, $V_n(2, 1)$ は伴 Pell 数であり, $D = 8$ となる.

今から貴金属比 M_n を拡張して複素貴金属比 M_n^* を導入する. 第 n 貴金属比 $\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ に対して, $\frac{n + \sqrt{-(n^2 + 4)}}{2}$ を第 n 複素貴金属比と呼ぶことにする. すなわち, 複素黄金比は $\frac{1 + \sqrt{-5}}{2}$ であり, 複素白銀比は $1 + \sqrt{-2}$ であり, 複素青銅比は $\frac{3 + \sqrt{-13}}{2}$ となる.

3.1 複素黄金比

特性方程式の解が複素黄金比及びその共役になるような漸化式を考える.

$$\begin{cases} M_1^* + \overline{M_1^*} = 1 \\ -M_1^* \overline{M_1^*} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{より} \quad M_{1,k+2}^* = M_{1,k+1}^* - \frac{3}{2} M_{1,k}^*$$

このとき

- $U_n \left(1, -\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} A_{088139}(n)$ より
- $U_n \left(1, -\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} B_n(1, 1, 2, 0)$
- $V_n \left(1, -\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} A_{138229}(n)$ より
- $V_n \left(1, -\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} A_n(1, 1, 2, 0) = \frac{1}{2^{n-1}} A_n(1, 2, 1, 0) = \frac{1}{2^{n-1}} A_n(1, 2, 0, 1)$

3.2 複素白銀比

特性方程式の解が複素白銀比及びその共役になるような漸化式を考える.

$$\begin{cases} M_2^* + \overline{M_2^*} = 2 \\ -M_2^* \overline{M_2^*} = -3 \end{cases} \quad \text{より} \quad M_{2,k+2}^* = 2M_{2,k+1}^* - 3M_{2,k}^*$$

このとき

- $U_n(2, -3) = A088137(n)$ より
 $U_n(2, -3) = B_n(1, 1, 0, 1)$
- $V_n(2, -3) = 2A087455(n)$ より
 $V_n(2, -3) = 2A_n(1, 1, 0, 1) = 2A_n(1, 0, 1, -1) = 2A_n(1, 1, 0, -1)$

3.3 複素青銅比

特性方程式の解が複素青銅比及びその共役になるような漸化式を考える.

$$\begin{cases} M_2^* + \overline{M_2^*} = 3 \\ -M_2^* \overline{M_2^*} = -\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{より} \quad M_{3,k+2}^* = 3M_{3,k+1}^* - \frac{11}{2}M_{3,k}^*$$

このとき

- $U_n\left(3, -\frac{11}{2}\right)$ は OEIS では見つからなかった. しかし, 次のことは分かった.
 $U_n\left(3, -\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}B_n(3, 2, 0, 3) = \frac{1}{2}B_n(3, 2, 3, 0) = \frac{1}{3}B_n(3, 3, 0, 2) = \frac{1}{3}B_n(3, 3, 2, 0)$
- $V_n\left(3, -\frac{11}{2}\right)$ は OEIS では見つからなかった. しかし, 次のことは分かった.
 $V_n\left(3, -\frac{11}{2}\right) = A_n(3, 0, 2, 3) = A_n(3, 0, 3, 2) = A_n(3, 2, 0, 3) = A_n(3, 2, 3, 0) = A_n(3, 3, 0, 2) = A_n(3, 3, 2, 0)$

4 Open Problem

- 複素貴金属比から作られた漸化式の隣接 2 項の比は収束しない. しかし, これらの漸化式と複素貴金属比には何か関係性はあるか?
- 高階の Lucas 数列に関しても同様な議論ができるか?

参考文献

- [1] Bajorska-Harapińska, B., Smoleń, B. & Wituła, R. On Quaternion Equivalent for Quasi-Fibonacci Numbers, Shortly Quaternaccis. Adv. Appl. Clifford Algebras 29, 54 (2019).
- [2] Wituła, R., Słota, D., Warzyński, A.: Quasi-Fibonacci numbers of the seventh order. J. Int. Seq. 9 (2006)
- [3] Wituła, R., Słota, D.: Quasi-Fibonacci numbers of order 11. J. Int. Seq. 10 (2007)
- [4] Wituła, R., Słota, D.: δ -Fibonacci numbers. Appl. Anal. Discret. Math. 3, 310 – 329 (2009)

三角関数のべき乗の有理値

渋川元樹* (神戸大理)

講演動画 : <https://www.youtube.com/watch?v=uICuC3Rb1Ng>

概要

Olmsted (1945), Carlitz-Thomas (1963) による三角関数の有理値に関する定理を, 三角関数のべき乗へ拡張する.

1 Introduction

\mathbb{Q} を有理数体, $\mathbb{Q}_{>0}$ を正の有理数全体, 正整数 m について $\zeta_m := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$ とする. 三角関数の有理値に関しては次の定理が知られている.

Theorem 1 (Olmsted [4], Carlitz-Thomas [2]). (1) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ ならば $\cos(\pi\theta)$ の値は

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$$

のいずれのみか. $\sin(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ についても同様.

(2) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ ならば $\tan(\pi\theta)$ の値は

$$0, \pm 1$$

のいずれのみか.

この系として, 次が直ちに得られる.

Corollary 2. (1) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$ ならば $\cos(\pi\theta)$ の値は

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$$

のいずれのみか. $\sin(\pi\theta)$ についても同様.

(2) $\theta \in \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$ ならば $\tan(\pi\theta)$ の値は

$$0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \pm\sqrt{3}$$

のいずれのみか.

*g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

実際,

$$\cos(\pi\theta)^2 = \frac{1 + \cos(2\pi\theta)}{2}, \quad \tan(\pi\theta)^2 = \frac{1}{\cos(\pi\theta)^2} - 1$$

に Theorem 1 を用いればよい.

本稿では以下の結果を示す.

Theorem 3. (1) $N \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\alpha^{\frac{1}{N}}, \dots, \alpha^{\frac{N-1}{N}} \notin \mathbb{Q}$ とする. 任意の正の整数 m について

$$\sqrt[N]{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

よって特に

$$\cos(\pi\theta), \cos(\pi\theta)^2, \dots, \cos(\pi\theta)^{N-1} \notin \mathbb{Q}$$

かつ $\cos(\pi\theta)^N \in \mathbb{Q}$ となるような $\theta \in \mathbb{Q}$ は存在しない. 同様に $\tan(\pi\theta), \tan(\pi\theta)^2, \dots, \tan(\pi\theta)^{N-1} \notin \mathbb{Q}$ かつ $\tan(\pi\theta)^N \in \mathbb{Q}$ なる $\theta \in \mathbb{Q}$ も存在しない.

Theorem 4. ある自然数 n と $\theta \in \mathbb{Q}$ が存在して $\cos(\pi\theta)^n \in \mathbb{Q}$ (*resp.* $\tan(\pi\theta)^n \in \mathbb{Q}$) ならば $\cos(\pi\theta)$ あるいは $\sin(\pi\theta)$ の値は

$$\sin(\pi\theta), \cos(\pi\theta) = \begin{cases} 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1 & (n : \text{odd}) \\ 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 & (n : \text{even}) \end{cases}. \quad (1)$$

resp.

$$\tan(\pi\theta) = \begin{cases} 0, \pm 1 & (n : \text{odd}) \\ 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1, \pm\sqrt{3} & (n : \text{even}) \end{cases}. \quad (2)$$

のいずれかのみ.

これは三角函数の等分値に立方根以上のべき根が単一では現れないことを言っており, いわゆる倍積問題や角の三等分等の作図不可能問題に近い印象を受ける. しかしその証明に関しては, 基本的に拡大次数 (Galois 理論抜き) の体論のみで片づく作図不可能問題とは異なり, Galois 理論 (体論だけでなく, 群論サイド) を本質的に用いる必要があるようなので (Galois 理論抜きで証明できるかは少なくとも私にはわからない), 問題の性質としては別物であると考えられる. 尤も Galois 理論を用いるならば, 円分拡大や Kummer 拡大の Galois 群に関するよく知られている事実から直ちに従う殆ど当たり前の結果であり, 目新しいことは何もないのだが, 作図不可能問題には触れるにもかかわらず, この事実に言及している教科書や論文は見当たらなかったため, 今回発表してみた次第である.

2 Preliminaries

Theorem 3 と Theorem 4 の証明には円分拡大と Kummer 拡大についてのいくつかの事実が必要となるのでそれについて述べる. まず円分拡大については以下の事実を用いる (適当な代数の教科書たとえば [3] 等を参照).

Lemma 5 (円分体の Galois 群). $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n) := |\{1 \leq a \leq n \mid \gcd(a, n) = 1\}|$ かつ

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times & \simeq & \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) & \curvearrowright & \mathbb{Q}(\zeta_n) & \rightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c & \mapsto & \tau_c & \curvearrowright & \zeta_n & \mapsto & \tau_c(\zeta_n) := \zeta_n^c \end{array} .$$

よって特に $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ は *abelian* であり, その *sub* は全て *normal* で, 中間体は全て \mathbb{Q} 上 *abelian* である.

以下, α は

$$\alpha^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{\frac{n-1}{n}} \notin \mathbb{Q} \quad (3)$$

を満たす正の有理数とし, Kummer 拡大 $K := \mathbb{Q}(\sqrt[n]{\alpha}, \zeta_n)$ について考察する.

Proposition 6. (1) $x^n - \alpha$ は \mathbb{Q} 上既約で $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{\alpha}) : \mathbb{Q}] = n$.

(2) $n \geq 2$ ならば $\sqrt[n]{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Proof. (1) 二項式 $x^n - \alpha$ の以下のような分解を考える:

$$x^n - \alpha = \prod_{i=1}^n (x - \sqrt[n]{\alpha} \zeta_n^i) = f_I(x) f_J(x). \quad (4)$$

ただし I, J は

$$[n] = I \sqcup J, \quad I \neq \emptyset, \quad J \neq \emptyset, \quad I \cap J = \emptyset \quad (5)$$

となる n 元集合 $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合であり,

$$\begin{aligned} f_I(x) &:= \prod_{i \in I} (x - \sqrt[n]{\alpha} \zeta_n^i) = x^{|I|} + \dots + (-1)^{|I|} \alpha^{\frac{|I|}{n}} \prod_{i \in I} \zeta_n^i, \\ f_J(x) &:= \prod_{j \in J} (x - \sqrt[n]{\alpha} \zeta_n^j) = x^{|J|} + \dots + (-1)^{|J|} \alpha^{\frac{|J|}{n}} \prod_{j \in J} \zeta_n^j. \end{aligned}$$

である. ここで $x^n - \alpha$ が \mathbb{Q} 上可約とすると, (5) かつ $f_I(x), f_J(x) \in \mathbb{Q}[x]$ となる $I, J \subset [n]$ が存在するが, 仮定 $\alpha^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{\frac{n-1}{n}} \in \mathbb{R}$ より, 特に

$$\prod_{j \in J} \zeta_n^j \in \mathbb{R}$$

ゆえ

$$\prod_{j \in J} \zeta_n^j = \prod_{j \in J} \zeta_n^{-j}.$$

よって

$$\left(\prod_{j \in J} \zeta_n^j \right)^2 = 1$$

となるので

$$\prod_{j \in J} \zeta_n^j = \pm 1.$$

仮定より $\alpha^{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{Q}$ ゆえ $\prod_{j \in J} (x - \sqrt[n]{\alpha} \zeta_n^j)$ の定数項は

$$(-1)^m \alpha^{\frac{m}{n}} \prod_{j \in J} \zeta_n^j = \pm (-1)^m \alpha^{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{Q}$$

となり矛盾.

(2) $\sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$ とすると

$$n = [\mathbb{Q}(\sqrt[n]{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

となり矛盾. □

Remark 7. 二項型多項式 $x^n - \alpha$ の \mathbb{Q} 上の既約性は普通は Eisenstein の既約判定法を用いて示すことが多いが, α に色々制約 (整数かつ平方数ではない等) が必要になってくるために実はあまりうまく論法ではない. しかし正の有理数 α に条件 (3) を課せば, 上述のように非常に簡単に \mathbb{Q} 上の既約性が示せる. 更にこれに $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, つまり円分多項式の \mathbb{Q} 上の既約性と併せることで, $\sqrt[n]{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\zeta_n)$ を得る. 主結果である Theorem 3 はより強く, $n \geq 3$ のときは, $\sqrt[n]{\alpha}$ が $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ だけでなく, 任意の $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ に含まれないことを主張している.

Lemma 8. (1) $n = p$: 奇素数のとき, $x^p - \alpha$ は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上既約で $[K : \mathbb{Q}(\zeta_p)] = p$ である. このとき K の \mathbb{Q} 上の拡大次数は $[K : \mathbb{Q}] = p\varphi(p) = p(p-1)$ であり, その Galois 群 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times & \simeq & \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \curvearrowright & K & \rightarrow & K \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ (1, 1) & \mapsto & \sigma & \curvearrowright & \sqrt[p]{\alpha} & \mapsto & \sigma(\sqrt[p]{\alpha}) := \zeta_p \sqrt[p]{\alpha} \\ & & & & \zeta_p & \mapsto & \sigma(\zeta_p) := \zeta_p \\ (0, c) & \mapsto & \tau_c & \curvearrowright & \sqrt[p]{\alpha} & \mapsto & \tau_c(\sqrt[p]{\alpha}) := \sqrt[p]{\alpha} \\ & & & & \zeta_p & \mapsto & \tau_c(\zeta_p) := \zeta_p^c \end{array} \quad (6)$$

特に $\tau_c \sigma = \sigma^c \tau_c$ ゆえ, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は *non-abelian* である.

(2) $n \geq 3$ のとき, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は *non-abelian* である.

Proof. (1) Proposition 6 (1) の証明と同様に分解 (4)

$$x^p - \alpha = f_I(x) f_J(x)$$

を考える. ここで $\gcd(|I|, p) = 1$ かつ $\gcd(|J|, p) = 1$ ゆえ $\mathbb{Q}(\alpha^{\frac{|I|}{p}})$, $\mathbb{Q}(\alpha^{\frac{|J|}{p}})$ は共に $\sqrt[p]{\alpha}$ を含むので, $\alpha^{\frac{|I|}{p}}, \alpha^{\frac{|J|}{p}} \notin \mathbb{Q}(\zeta_p)$ がいえる. よって $x^p - \alpha$ は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上既約であり

$$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\zeta_p)][\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p\varphi(p) = p(p-1).$$

これで $|\text{Gal}(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ がわかるので Galois 群も (6) のように決定でき, 特に *non-abelian* であることがわかる.

(2) まず n がある奇素数 p で割り切れるとき, \mathbb{Q} 上の Galois 拡大 K は \mathbb{Q} 上の *non-abelian* な Galois 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{\alpha}, \zeta_p)$ を含むので, Galois 群 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は *non-abelian* である. $n = 2^m$, $m \geq 2$ のときはやはり *non-abelian* な $\text{sub}\mathbb{Q}(\sqrt[4]{\alpha}, \zeta_4)$ を含むので, やはり $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は *non-abelian* である. □

Remark 9. 一般の n について, $x^n - \alpha$ は $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 上既約とは限らない. たとえば $n = 8, \alpha = 2$ のときは

$$x^8 - 2 = (x^4 - \sqrt{2})(x^4 + \sqrt{2}) = (x^4 - \zeta_8 - \zeta_8^{-1})(x^4 + \zeta_8 + \zeta_8^{-1})$$

となり, これは $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 上で可約になってしまう. しかし上述したように Galois 群 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \zeta_8)/\mathbb{Q})$ は non-abelian である.

3 Proof of Theorem 3

Theorem 3 における $N \geq 3$ と $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し

$$\sqrt[N]{\alpha} \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$$

なる m が存在したとする. よって

$$\mathbb{Q}(\sqrt[N]{\alpha}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

$\mathbb{Q}(\sqrt[N]{\alpha})$ は \mathbb{Q} 上 Galois ではないが, K は \mathbb{Q} 上 Galois で,

$$K \subset \mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_N) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{mN}).$$

K は $\mathbb{Q}(\zeta_{mN})/\mathbb{Q}$ の中間体で

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \triangleleft \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{mN})/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/mN\mathbb{Z})^\times.$$

しかし $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は non-abelian なのでこれは矛盾. よって任意の正の整数 m について

$$\sqrt[N]{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\zeta_m) \tag{7}$$

である.

次いで上述の $N \geq 3$ と $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し

$$\cos(\pi\theta) = \sqrt[N]{\alpha}$$

となる $\theta \in \mathbb{Q}$ が存在したとする. $\theta \in \mathbb{Q}$ ゆえ, ある m が存在して

$$\sqrt[N]{\alpha} = \cos(\pi\theta) \in \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

これは先に証明した (7) に反する. $\tan(\pi\theta)$ についても同様である. □

Remark 10. Theorem 3 より, 有理数の 3 乗根以上は円分体には存在しないことがわかったが, 平方根に関しては Gauss 和 [1]

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{k^2} = \frac{1 + \sqrt{-1}}{2} (1 + (-\sqrt{-1})^m) \sqrt{m} = \begin{cases} (1 + \sqrt{-1})\sqrt{m} & (m \equiv 0 \pmod{4}) \\ \sqrt{m} & (m \equiv 1 \pmod{4}) \\ 0 & (m \equiv 2 \pmod{4}) \\ \sqrt{-1}\sqrt{m} & (m \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases},$$

$$\zeta_4 = \sqrt{-1}, \quad \zeta_8 + \zeta_8^{-1} = \sqrt{2}$$

から, 任意の有理数の平方根を含む円分体が常に存在することがわかる.

4 Proof of Theorem 4

(2) の証明は (1) と同様なので (1) のみ示す. $n = 1$ と $n = 2$ の場合はそれぞれ Theorem 1 と Corollary 2 である. $n \geq 3$ については以下の 3 つの場合が考えられる:

- 1) $\cos(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$,
- 2) $\cos(\pi\theta) \notin \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta)^2 \in \mathbb{Q}$,
- 3) $\cos(\pi\theta) \notin \mathbb{Q}$ かつ $\cos(\pi\theta)^2 \notin \mathbb{Q}$.

1) については Theorem 1 と Corollary 2 より $\cos(\pi\theta)$ (or $\sin(\pi\theta)$) の取りうる値は

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1.$$

同様に 2) については $\cos(\pi\theta)$ の取りうる値は

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

最後に 3) だがこれは先に証明した Theorem 3 より起こりえない. よって結論 (1)

$$\sin(\pi\theta), \cos(\pi\theta) = \begin{cases} 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1 & (n : \text{odd}) \\ 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 & (n : \text{even}) \end{cases}$$

を得る.

Acknowledgement

巡回拡大や Kummer 拡大についての有益なコメントを頂いた谷口隆教授 (神戸大学) に感謝いたします.

参考文献

- [1] B. C. Berndt, R. J. Evans and K. S. Williams: *Gauss and Jacobi sums*, (1998), John Wiley.
- [2] L. Carlitz and J. M. Thomas: *Rational tabulated values of trigonometric functions*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 789–793.
- [3] S. Lang: *Algebra Revised Third Edition*, GTM **211**, 2002.
- [4] J. M. H. Olmsted, *Rational values of trigonometric functions*, Amer. Math. Monthly **52-9** (1945) 507–508.

逆転フィボナッチ数

萩原幸男 (元東京大学・元日本大学)

要旨 フィボナッチ数の構成は2色 (A色とB色) の球モデルを用いて説明が可能である. n を整数時間とするとき, n の時点の個数をそれぞれ A_n および B_n とすれば $A_n + B_n$ はフィボナッチ数 F_n に等しくなる. いまある時点で突如逆転が起こり, AはBにBはAに相互に入れ替わるものとする. 本論では逆転前後のフィボナッチ数の挙動に焦点を当てる.

1. 正モデルと逆モデル

簡単のために図1と表1により説明する. ここではA色とB色の2種類の球を考える. n を整数時間とするとき, 時点 n でA色であった球は時点 $n+1$ でB色に変身し, B色であった球はA色の球とB色の球の2個の球に変身するものとする. 時点 n におけるA球の個数を A_n 個, B球の個数を B_n とするとき, 初期条件を $A_1 = 1, B_1 = 0$ とすれば $A_n + B_n$ は通常のフィボナッチ数 F_n に等しくなる. 本論ではこれを「正フィボナッチモデル」略して「正モデル」と呼ぶことにする.

次いで時点 $n = K$ と $K+1$ の間で逆転が起こるものとする. 図1および表1では $n = 5 \sim 6$ の間に逆転が起こる. 逆転と同時にAはBにBはAに変身する. つまり時点 n でAであった球は時点 $n+1$ においてはAとBの2個の球に, Bであった球はAに変身する. 逆転後のフィボナッチ数を改めて G_n と記すと次のようにまとめることができる.

$$\begin{aligned} G_n &= F_n & n \leq K \\ G_n &= F_n - F_{n-K} & n \geq K+1 \end{aligned} \tag{1}$$

本論では逆転後のモデルを「逆フィボナッチモデル」略して「逆モデル」と呼ぶ.

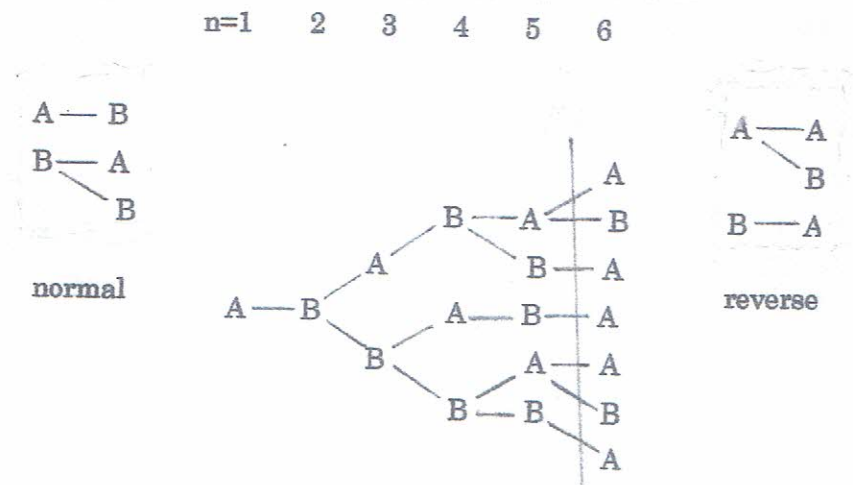


図1 フィボナッチ数の2球モデルの時点 $K = 5 \sim 6$ における逆転

表 I 図 1 の内容説明. 時点 n における A と B の数 A_n と B_n . フィボナッチ数 $F_n (= A_n + B_n)$, 逆転時を $n = K = 6$ として $n \geq 6$ 以後の逆転フィボナッチ数 $G_n (= A_n + B_n)$. F_n は逆転に無関係だから逆転の影響は差 $F_n - G_n$ に現れる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	1	0	1	1	2	5	7	12	19	31
B_n	0	1	1	2	3	2	5	7	12	19
G_n	1	1	2	3	5	7	12	19	31	50
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F_n - G_n$	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5

2. 遷移行列

表 1 の数値の配列を見ると正モデル ($1 \leq n \leq 5$) では

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= B_n \\ B_{n+1} &= A_n + B_n \end{aligned} \quad (2)$$

の関係がある. これを行列を用いて書くと

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

とすることができる.

一方逆モデル ($6 \leq n$) の範囲では

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + B_n \text{ 数字} \\ B_{n+1} &= A_n \end{aligned} \quad (4)$$

の関係が分かる. 行列を用いて書けば

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる. 遷移行列を用いれば n が増えても, 比較的簡単に $n+1$ の数値を求めることができる.

3. 生成関数と漸化式

表 1 の下段から $K = 5$ より次の一般的関係を読み取ることができる.

$$\begin{aligned} F_n - G_n &= 0 & n \leq K \\ &= F_{n-K} & n \geq K+1 \end{aligned} \quad (6)$$

いま生成関数を

$$f(t) = F_1 t + F_2 t^2 + F_3 t^3 + \dots \quad (7)$$

$$g(t) = G_1 t + G_2 t^2 + G_3 t^3 + \dots$$

と置くと式(6)より次の関係式を導くことができる.

$$g(t) = (1 - t^K) f(t) \quad (8)$$

フィボナッチ数 F_n の漸化式はよく知られているように初期値を $F_0=0, F_1=1$ として

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2 \quad (9)$$

である。これに対して逆転フィボナッチ数 G_n の漸化式は

$$\begin{aligned} G_n &= F_n & n < K \\ G_n &= G_{n-1} + G_{n-3} & n = K \\ G_n &= G_{n-1} + G_{n-2} & n > K \end{aligned} \quad (10)$$

となる。逆転の時点 $n = K$ においては漸化式の右辺第2項が通常ならば G_{n-2} となるべきところ G_{n-3} となることは興味深い。