

日本フィボナッチ協会  
第**17**回研究集会報告書

2019年8月

日本フィボナッチ協会

## 日本フィボナッチ協会／第17回研究集会 プログラム

日 時： 2019年8月23日（金曜日） 10時30分～17時40分  
場 所： 東京理科大学（神楽坂キャンパス）2号館4階の241・242教室  
アクセス： 飯田橋駅（JR総武線、東京メトロ東西線、有楽町線、南北線、都営大江戸線）徒歩5分  
参加費： 1000円（小学生・中学生・高校生・高専生は無料）

主 催：日本フィボナッチ協会  
協 賛：東京理科大学理数教育研究センター

### プログラム

講演（241教室）

10:30～10:35 開会の辞（大関 清太）

司会 大関清太

---

10:35～10:50 河野 真

Fibonomial を含む級数に関する考察

10:50～11:10 中村 滋（元東京海洋大学）

無限級数の収束に関する新・旧の証明

11:10～11:30 細矢治夫（元お茶の水女子大）

等電非環式ポリエンの秘密

11:30～11:45 萩原幸男（公財地震予知総合研究振興会）

分割数を参照してフィボナッチ（リュカ）数の拡張を試みる

11:45～12:00 久保田和臣（放送大学教養学部）

黄金比  $\phi$  の連分数表示

12:00～12:15 小梁 修（OSA 工房）

星型正多面体の体積を  $\phi$ （ファイ）で計算・比較してみる！

---

12:15～13:30 昼食

展示（242教室）：問題コーナー（巻末掲載）

数学体験館・近代科学資料館見学

司会 中村 滋

---

- 13:30~13:50 渋川元樹 (神戸大学理学部)  
cosine abenacci 数と abelucas 数の不等式
- 13:50~14:05 梶田 光 (小学校 5 年生)  
スーパー双子素数の個数公式と高橋条件
- 14:05~14:20 土屋知人 (毎日カルチャー)  
不等式  $\sigma(a) + \phi(a) \geq 2a$  の研究
- 14:20~14:35 宮本憲一 (毎日カルチャー)  
新種のスーパーオイラー完全数について
- 14:35~14:55 飯高 茂 (元学習院大学)  
友愛数の平行移動について
- 14:55~15:15 片山真一 (徳島大学理工学部), 安井宏晴 (倉吉北高校)  
碁石ひろいとフィボナッチ数
- 

休憩 15:15~15:55

司会 飯高 茂

---

- 15:55~16:15 小松尚夫 (浙江理工大学)  
Topological index with generalized continued fractions
- 16:15~16:35 根岸利一郎 (埼玉工大), 関口久美子 (埼玉工大),  
船崎明美 (株ビジネスサポート), 内田正哉 (埼玉工大)  
Parastichy numbers 決定法による充填画像評価
- 16:35~16:55 岩淵勇樹  
フィボナッチ記数法に基づくコラッツの問題
- 16:55~17:15 津野祐司 (飯山高等学校)  
ペル方程式の整数解から得られる数列の生成関数が整数値をとる有理数の必要十分条件
- 17:15~17:35 中川幸一 (埼玉大)  
プラスチック定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形
- 

17:35 事務連絡 大関清太

17:40 閉会の辞

18:00～21:00 懇親会

場所：会場の近く PORTA 会費 4000 円（学生・院生は半額）

『第 19 回フィボナッチ数とその応用に関する国際会議』は  
2020 年 7 月 20 日～7 月 25 日にサラエボ大学で開かれます。  
参加する予定の方連絡をください。

# Fibonomial を含む級数に関する考察

河野 真\*

2019年8月23日

## 概要

Fibonomial  $\binom{n}{p}_F$  の和  $\sum_{k=1}^n \binom{k}{p}_F$  の閉じた式を求める手順を考えてみた。

## 1 基本事項の確認

注釈 1 (記号). 本稿に用いられる記号と基本定理について記述する。

$F_n$  : *Fibonacci numbers*

$L_n$  : *Lucas numbers*

$\alpha, \beta$  : 多項式  $x^2 - x - 1$  の零点

補題 1 (和分差分の基本定理). 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  について、

$$a_n - a_{n-1} = b_n \iff a_n - a_0 = \sum_{k=1}^n b_k.$$

系 1. 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  について、 $a_0 = 0$  ならば、

$$a_n - a_{n-1} = b_n \iff a_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

定義 1. 非負整数  $p$ 、整数  $n$  に対して、 $\binom{n}{p}_F$  を

$$\binom{n}{p}_F = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1}^m F_{n+1-k}}{F_p} & (p > 0) \\ 1 & (p = 0) \end{cases}$$

で定義し、*Fibonomial coefficient* または、*Fibonomial* という。

負の  $n$  に対して、 $\binom{n}{p}_F$  を定義できることを注意する。

$F_n^p$  が満足すべき漸化式については、次が知られている。

---

\* e-mail:qgb01362@yahoo.co.jp

表1 定義 1.に基づく  $\binom{n}{k}_F$  の表

$k \setminus n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
2	-40	-15	-6	-2	-1	0	0	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895
3	-260	60	-15	3	-1	0	0	0	1	3	15	60	260	1092	4641	19635	83215
4	1820	260	40	5	1	0	0	0	0	1	5	40	260	1820	12376	85085	582505
5	12376	-1092	104	-8	1	0	0	0	0	0	1	8	104	1092	12376	136136	1514513
6	-85085	-4641	-273	-13	-1	0	0	0	0	0	0	1	13	273	4641	85085	1514513
7	-582505	19635	-714	21	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	21	714	19635	582505
8	3994320	83215	1870	34	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	34	1870	83215

定理 1. 非負整数  $p$ , 整数  $n$  に対して、

$$\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{p+1}{k}_F F_{n-k}^p = 0.$$

この定理において  $F_n^p$  を  $\binom{n-k}{p}_F$  に置き換えても等式は成立する。すなわち、

定理 2. 非負整数  $p$ , 整数  $n$  に対して、

$$\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{p+1}{k}_F \binom{n-k}{p}_F = 0.$$

定義 2.  $\binom{n}{p}_F$  の漸化式の特性多項式を

$$U_p(x) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{p+1}{k}_F x^{p+1-k}.$$

とする。

例 1. 漸化式を例示する。

$$\binom{n}{0}_F - \binom{n-1}{0}_F = 0.$$

$$\binom{n}{1}_F - \binom{n-1}{1}_F - \binom{n-2}{1}_F = 0.$$

$$\binom{n}{2}_F - 2\binom{n-1}{2}_F - 2\binom{n-2}{2}_F + \binom{n-3}{2}_F = 0.$$

$$\binom{n}{3}_F - 3\binom{n-1}{3}_F - 6\binom{n-2}{3}_F + 3\binom{n-3}{3}_F + \binom{n-4}{3}_F = 0.$$

$$\binom{n}{4}_F - 5\binom{n-1}{4}_F - 15\binom{n-2}{4}_F + 15\binom{n-3}{4}_F + 5\binom{n-4}{4}_F - \binom{n-5}{4}_F = 0.$$

$$\binom{n}{5}_F - 8\binom{n-1}{5}_F - 40\binom{n-2}{5}_F + 60\binom{n-3}{5}_F + 40\binom{n-4}{5}_F - 8\binom{n-5}{5}_F - \binom{n-6}{5}_F = 0.$$

$$\binom{n}{6}_F - 13\binom{n-1}{6}_F - 104\binom{n-2}{6}_F + 260\binom{n-3}{6}_F + 260\binom{n-4}{6}_F - 104\binom{n-5}{6}_F - 13\binom{n-6}{6}_F + \binom{n-7}{6}_F = 0.$$

$$\binom{n}{7}_F - 21\binom{n-1}{7}_F - 273\binom{n-2}{7}_F + 1092\binom{n-3}{7}_F + 1820\binom{n-4}{7}_F - 1092\binom{n-5}{7}_F - 273\binom{n-6}{7}_F + 21\binom{n-7}{7}_F + \binom{n-8}{7}_F = 0.$$

$$\binom{n}{8}_F - 34\binom{n-1}{8}_F - 714\binom{n-2}{8}_F + 4641\binom{n-3}{8}_F + 12376\binom{n-4}{8}_F - 12376\binom{n-5}{8}_F - 4641\binom{n-6}{8}_F + 714\binom{n-7}{8}_F + 34\binom{n-8}{8}_F - \binom{n-9}{8}_F = 0.$$

注釈 2.  $\binom{n}{1}_F = F_n$  の漸化式  $\binom{n}{1}_F - \binom{n-1}{1}_F - \binom{n-2}{1}_F = 0$  は、 $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$  と一致することを確認する。

例 2. 特性多項式を例示し、既約多項式の積で表す。

$$U_0(x) = x - 1.$$

$$\begin{aligned} U_1(x) &= x^2 - x - 1. \\ &= x^2 - L_1x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x) &= x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ &= (x^2 - 3x + 1)(x + 1). \\ &= (x^2 - L_2x + 1)(x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3(x) &= x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 \\ &= (x^2 - 4x - 1)(x^2 + x - 1). \\ &= (x^2 - L_3x - 1)(x^2 + L_1x - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4(x) &= x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 15x^2 + 5x - 1 \\ &= (x^2 - 7x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x - 1) \\ &= (x^2 - L_4x + 1)(x^2 + L_2x + 1)U_0(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5(x) &= x^6 - 8x^5 - 40x^4 + 60x^3 + 40x^2 - 8x - 1 \\ &= (x^2 - 11x - 1)(x^2 + 4x - 1)(x^2 - x - 1) \\ &= (x^2 - L_5x - 1)(x^2 + L_3x - 1)U_1(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_6(x) &= x^7 - 13x^6 - 104x^5 + 260x^4 + 260x^3 - 104x^2 - 13x + 1 \\ &= (x^2 - 18x + 1)(x^2 + 7x + 1)(x^2 - 3x + 1)(x + 1) \\ &= (x^2 - L_6x + 1)(x^2 + L_4x + 1)U_2(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_7(x) &= x^8 - 21x^7 - 273x^6 + 1092x^5 + 1820x^4 - 1092x^3 - 273x^2 + 21x + 1 \\
&= (x^2 - 29x - 1)(x^2 + 11x - 1)(x^2 - 4x - 1)(x^2 + x - 1) \\
&= (x^2 - L_7x - 1)(x^2 + L_5x - 1)U_3(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_8(x) &= x^9 - 34x^8 - 714x^7 + 4641x^6 + 12376x^5 - 12376x^4 - 4641x^3 + 714x^2 + 34x - 1 \\
&= (x^2 - 47x + 1)(x^2 + 18x + 1)(x^2 - 7x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x - 1) \\
&= (x^2 - L_8x + 1)(x^2 + L_6x + 1)U_4(x).
\end{aligned}$$

特性多項式は、次のように体 $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ 上で完全に分解できる。

**命題 1.** 非負整数 $p$ に対して、

$$U_p(x) = \prod_{k=0}^p (x - \alpha^{p-k} \beta^k)$$

これによって、次の定理を得る。

**定理 3.** 非負整数 $p$ に対して、

$$\begin{aligned}
U_{p+4}(x) &= (x^2 - L_{p+4}x + (-1)^{p+4})(x^2 + L_{p+2}x + (-1)^{p+2})U_p(x) \\
&= \begin{cases} (x^4 - L_{p+3}x^3 - (L_{p+3}^2 + 3)x^2 - L_{p+3}x + 1)U_p(x) & (p : \text{even}) \\ (x^4 - L_{p+3}x^3 - (L_{p+3}^2 - 3)x^2 + L_{p+3}x + 1)U_p(x) & (p : \text{odd}) \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2 実際に $\sum_{k=1}^n \binom{k}{p}_F$ を計算してみる

定理2の漸化式を用いて、 $\sum_{k=1}^n \binom{k}{p}_F$ を計算する。

### 2.1 $p \not\equiv 0 \pmod{4}$ の場合

**命題 2.** 正整数 $n$ に対して、

(1)

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1}_F = \binom{n+2}{1}_F - 1.$$

(2)

$$2 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2}_F = \binom{n+2}{2}_F - \binom{n+1}{2}_F - \binom{n}{2}_F - 1.$$

(3)

$$4 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3}_F = \binom{n+3}{3}_F - 2 \binom{n+2}{3}_F - 8 \binom{n+1}{3}_F - \binom{n}{3}_F - 1.$$

**証明.** (1) 漸化式

$$\binom{n+1}{1}_F - \binom{n}{1}_F - \binom{n-1}{1}_F = 0$$



から、

$$\binom{n}{1}_F = \binom{n+1}{1}_F - \binom{n-1}{1}_F = \left[ \binom{n+1}{1}_F + \binom{n}{1}_F \right] - \left[ \binom{n}{1}_F + \binom{n-1}{1}_F \right]$$

によって、 $a_n = \binom{n+1}{1}_F + \binom{n}{1}_F, b_n = \binom{n}{1}_F$  として、補題1.により、\*1

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1}_F = \binom{n+1}{1}_F + \binom{n}{1}_F - 1$$

を得る。

(2) 漸化式

$$\binom{n+2}{2}_F - 2\binom{n+1}{2}_F - 2\binom{n}{2}_F + \binom{n-1}{2}_F = 0$$

から、

$$\begin{aligned} 2\binom{n}{2}_F &= \binom{n+2}{2}_F - 2\binom{n+1}{2}_F + \binom{n-1}{2}_F \\ &= \left[ \binom{n+2}{2}_F - \binom{n+1}{2}_F - \binom{n}{2}_F \right] - \left[ \binom{n+1}{2}_F - \binom{n}{2}_F - \binom{n-1}{2}_F \right] \end{aligned}$$

によって、

$$2\sum_{k=1}^n \binom{k}{2}_F = \binom{n+2}{2}_F - \binom{n+1}{2}_F - \binom{n}{2}_F - 1$$

を得る。

(3) 漸化式

$$\binom{n+3}{3}_F - 3\binom{n+2}{3}_F - 6\binom{n+1}{3}_F + 3\binom{n}{3}_F + \binom{n-1}{3}_F = 0$$

から、

$$\begin{aligned} 4\binom{n}{3}_F &= \binom{n+3}{3}_F - 3\binom{n+2}{3}_F - 6\binom{n+1}{3}_F + 7\binom{n}{3}_F + \binom{n-1}{3}_F \\ &= \left[ \binom{n+3}{3}_F - 2\binom{n+2}{3}_F - 8\binom{n+1}{3}_F - \binom{n}{3}_F \right] \\ &\quad - \left[ \binom{n+2}{3}_F - 2\binom{n+1}{3}_F - 8\binom{n}{3}_F - \binom{n-1}{3}_F \right] \end{aligned}$$

によって、

$$4\sum_{k=1}^n \binom{k}{3}_F = \binom{n+3}{3}_F - 2\binom{n+2}{3}_F - 8\binom{n+1}{3}_F - \binom{n}{3}_F - 1$$

を得る。 □

同様の計算により、 $p \not\equiv 0 \pmod{4}$  のとき導くことができる。

この手順を、次のように定式化する。

---

\*1 以下、この記述は省略する。

定理 4.  $0 \leq n \leq p$ なる整数 $n, p$ に対して、 $g_n^{(p)}$ を、

$$g_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \binom{p}{k}_F$$

とすると、

$$-g_{p+1}^{(p+1)} \sum_{k=1}^n \binom{k}{p}_F = \sum_{k=0}^p g_k^{(p+1)} \binom{n+p-k}{p}_F - g_{p+1}^{(p+1)} \binom{n}{p}_F - 1.$$

## 2.2 $p \equiv 0 \pmod{4}$ の場合

$p = 4$ の場合を示す。なお、 $p = 9, 12, \dots$  においても、同様の手順で導くことができる。

命題 3. (1) 整数 $n$ に対して、

$$\binom{n}{4}_F - 4 \binom{n-1}{4}_F - 19 \binom{n-2}{4}_F - 4 \binom{n-3}{4}_F + \binom{n-4}{4}_F - 1 = 0$$

(2) 非負整数 $n$ に対して、

$$\sum_{k=1}^n \left[ 25 \binom{k}{4} + 1 \right] = \binom{n+3}{4}_F - 3 \binom{n+2}{4}_F - 22 \binom{n+1}{4}_F + \binom{n}{4}_F.$$

証明. (1) 漸化式

$$\binom{n}{4}_F - 5 \binom{n-1}{4}_F - 15 \binom{n-2}{4}_F + 15 \binom{n-3}{4}_F + 5 \binom{n-4}{4}_F - \binom{n-5}{4}_F = 0.$$

から、

$$\begin{aligned} & \binom{n}{4}_F - 4 \binom{n-1}{4}_F - 19 \binom{n-2}{4}_F - 4 \binom{n-3}{4}_F + \binom{n-4}{4}_F \\ &= \binom{n-1}{4}_F - 4 \binom{n-2}{4}_F - 19 \binom{n-3}{4}_F - 4 \binom{n-4}{4}_F + \binom{n-5}{4}_F. \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} & \binom{n}{4}_F - 4 \binom{n-1}{4}_F - 19 \binom{n-2}{4}_F - 4 \binom{n-3}{4}_F + \binom{n-4}{4}_F \\ &= \binom{4}{4}_F - 4 \binom{3}{4}_F - 19 \binom{2}{4}_F - 4 \binom{1}{4}_F + \binom{0}{4}_F = 1. \end{aligned}$$

を得る。

(2) (1)により、

$$\binom{n+3}{4}_F - 4 \binom{n+2}{4}_F - 19 \binom{n+1}{4}_F - 4 \binom{n}{4}_F + \binom{n-1}{4}_F = 1$$

であるので、

$$\begin{aligned} 25 \binom{n}{4}_F + 1 &= \binom{n+3}{4}_F - 4 \binom{n+2}{4}_F - 19 \binom{n+1}{4}_F + 21 \binom{n}{4}_F + \binom{n-1}{4}_F \\ &= \left[ \binom{n+3}{4}_F - 3 \binom{n+2}{4}_F - 22 \binom{n+1}{4}_F - \binom{n}{4}_F \right] \\ &\quad - \left[ \binom{n+2}{4}_F - 3 \binom{n+1}{4}_F - 22 \binom{n}{4}_F - \binom{n-1}{4}_F \right]. \end{aligned}$$

であるので、

$$\sum_{k=1}^n \left[ 25 \binom{k}{4} + 1 \right] = \binom{n+3}{4}_F - 3 \binom{n+2}{4}_F - 22 \binom{n+1}{4}_F + \binom{n}{4}_F.$$

を得る。 □

### 3 $\binom{n}{p+4}_F$ と $\binom{n}{p}_F$ の関係と和の評価

定理3.により、次の関係式を得る。

定理 5. (1) 偶数  $p \geq 0$  と整数  $n$  に対して、

$$\binom{n+4}{p+4}_F - L_{p+3} \binom{n+3}{p+4}_F - (L_{p+3}^2 + 3) \binom{n+2}{p+4}_F - L_{p+3} \binom{n+1}{p+4}_F + \binom{n}{p+4}_F = \binom{n}{p}_F.$$

(2) 奇数  $p > 0$  と整数  $n$  に対して、

$$\binom{n+4}{p+4}_F - L_{p+3} \binom{n+3}{p+4}_F - (L_{p+3}^2 - 3) \binom{n+2}{p+4}_F + L_{p+3} \binom{n+1}{p+4}_F + \binom{n}{p+4}_F = \binom{n}{p}_F.$$

これを用いて、 $\sum_{k=1}^n \binom{k}{p+4}_F$  と  $\sum_{k=1}^n \binom{k}{p}_F$  の関係を考えることができる。

系 2. (1) 偶数  $p \geq 0$  と正整数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[ (L_{p+3} + 1)^2 \binom{k+1}{p+4}_F + \binom{k-1}{p}_F \right] \\ &= \binom{n+3}{p+4}_F + (1 - L_{p+3}) \binom{n+2}{p+4}_F + (L_{p+3} - 1) \binom{n+1}{p+4}_F - \binom{n}{p+4}_F. \end{aligned}$$

(2) 奇数  $p > 0$  と正整数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[ (L_{p+3}^2 - 5) \binom{k+1}{p+4}_F + \binom{k-1}{p}_F \right] \\ &= \binom{n+3}{p+4}_F + (1 - L_{p+3}) \binom{n+2}{p+4}_F - (1 + L_{p+3}) \binom{n+1}{p+4}_F - \binom{n}{p+4}_F. \end{aligned}$$

系 3. 偶数  $p \geq 0$  と正整数  $n$  に対して、

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \left[ (L_{p+3} + 1)^2 \binom{t+1}{p+4}_F + \binom{t-1}{p}_F \right] = \binom{n+3}{p+4}_F + (2 - L_{p+3}) \binom{n+2}{p+4}_F + \binom{n+1}{p+4}_F.$$

例 3. 整数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[ 25 \binom{k+1}{4}_F + \binom{k-1}{0}_F \right] &= \binom{n+3}{4}_F - 3 \binom{n+2}{4}_F + 3 \binom{n+1}{4}_F - \binom{n}{4}_F. \\ \sum_{k=1}^n \left[ 45 \binom{k+1}{5}_F + \binom{k-1}{1}_F \right] &= \binom{n+3}{5}_F - 6 \binom{n+2}{5}_F - 8 \binom{n+1}{5}_F - \binom{n}{5}_F. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[ 144 \binom{k+1}{6}_F + \binom{k-1}{2}_F \right] = \binom{n+3}{6}_F - 10 \binom{n+2}{6}_F + 10 \binom{n+1}{6}_F - \binom{n}{6}_F.$$

$$\sum_{k=1}^n \left[ 319 \binom{k+1}{7}_F + \binom{k-1}{3}_F \right] = \binom{n+3}{7}_F - 17 \binom{n+2}{7}_F - 19 \binom{n+1}{7}_F - \binom{n}{7}_F.$$

例 4. 整数  $n$  に対して、

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \left[ 25 \binom{t+1}{4}_F + \binom{t-1}{0}_F \right] = \binom{n+3}{4}_F - 2 \binom{n+2}{4}_F + \binom{n+1}{4}_F.$$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \left[ 144 \binom{t+1}{6}_F + \binom{t-1}{2}_F \right] = \binom{n+3}{6}_F - 9 \binom{n+2}{6}_F + \binom{n+1}{6}_F.$$

## 4 余談

$\binom{n}{4}_F$  については、次の式が成り立つ。

命題 4. 正整数  $n$  に対して、

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \sum_{u=1}^t \sum_{v=1}^u \left[ 25 \binom{v+1}{4}_F + 1 \right] = \binom{n+3}{4}_F.$$

注釈 3.

$$25 \binom{n+1}{4}_F + 1 = \binom{n+3}{4}_F - 4 \binom{n+2}{4}_F + 6 \binom{n+1}{4}_F - 4 \binom{n}{4}_F + \binom{n-1}{4}_F$$

は、後方差分演算子  $\Delta$  を使って、

$$25 \binom{n+1}{4}_F + 1 = \Delta^4 \left[ \binom{n+3}{4}_F \right]$$

と表現できる。

# 無限級数の収束に関する新・旧の証明

東京海洋大学名誉教授 中村 滋

日本フィボナッチ協会 第17回 研究集会

2019年8月23日

今回は無限級数の収束に関する新・旧の証明について報告します。一部、拙著『素数物語』（岩波書店）からの引用です。

例 級数  $H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  は発散する。この級数を調和級数 (**harmonic series**) と言う。

(証明) オレム (Nicole Oresme; 1320? - 1382) の証明は、最古の証明でありながら、最もエレガントである。

$$\begin{aligned} H &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

となり、 $\frac{1}{2}$  が限りなく加わるので、 $H$  は無限に大きくなる。少しだけ解説を加えよう。 $H = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots$  と、分母に2のべきが出る度に括弧を閉じ、次に括弧の中の項を  $\frac{1}{2^{n-1}+1}$  から  $\frac{1}{2^n}$  まで全部最小の  $\frac{1}{2^n}$  で置き換えると、その方が小さくなる。その括弧の中には、分母が  $2^{n-1}+1$  から  $2^n$  まで、ちょうど  $2^{n-1}$  個の  $\frac{1}{2^n}$  があるので、括弧内の和はすべて  $\frac{1}{2}$  になる。素直に納得できる良い証明である。

(証明終)

こうしてついに人類は無限級数の発散を証明することに成功したのである。このような良い証明には、また別の良い証明が見つかるものだ。ヨーハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli; 1667-1748) の古典的な証明に始まり、連綿と様々な証明が続くが、つい最近見つかった分かりやすい証明を二つ紹介しよう。

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \\ &> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{(2n+2)(2n+2)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = H \end{aligned}$$

となる。最初の  $\geq$  は「相加平均  $\geq$  相乗平均」の不等式で、その次の  $>$  は分母を大きくしたことによる不等式である。もし  $H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  が有限だと仮定すると、 $H > H$  という結論は明らかに矛盾になる。これはプラザによる証明である。

(Ángel Plaza, "The Generalized Harmonic Series Diverges by the AM-GM Inequality", Mathematics Magazine, vol. 91; 2018. June, p.217)

彼はほとんど同じ時期にもう 1 つの新証明を別の雑誌に発表した。正の数  $a$  と  $b$  との「調和平均」  $c$  は、 $\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{a+b}{2ab}$  と定義される。「相加平均  $\geq$  相乗平均」ではなく「調和平均  $\leq$  相加平均」を使い、

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right)$$

と、ここまでは同じで、

$$H \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{4n+3} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{4n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = H$$

となって矛盾になるという証明である。(ditto, “The Harmonic Series Diverges”, American Mathematical Monthly, vol. 125; 2018. March. p. 222) どちらもシンプルで味わい深い。

(この新証明は拙著『素数物語』による) (証明終)

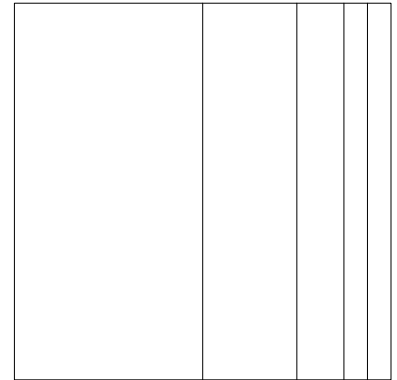
素晴らしい証明ですね。オレムは無限等比級数の和も求めています。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

という無限等比級数の和です。この証明がまた素晴らしいのです。一辺が 1 の正方形を底辺の midpoint で真っ二つに割り、右側の半分の長方形をまた底辺の midpoint で二つに割り、そこで残された半分をまた底辺の midpoint で二つに割ります。このように続けていくと、

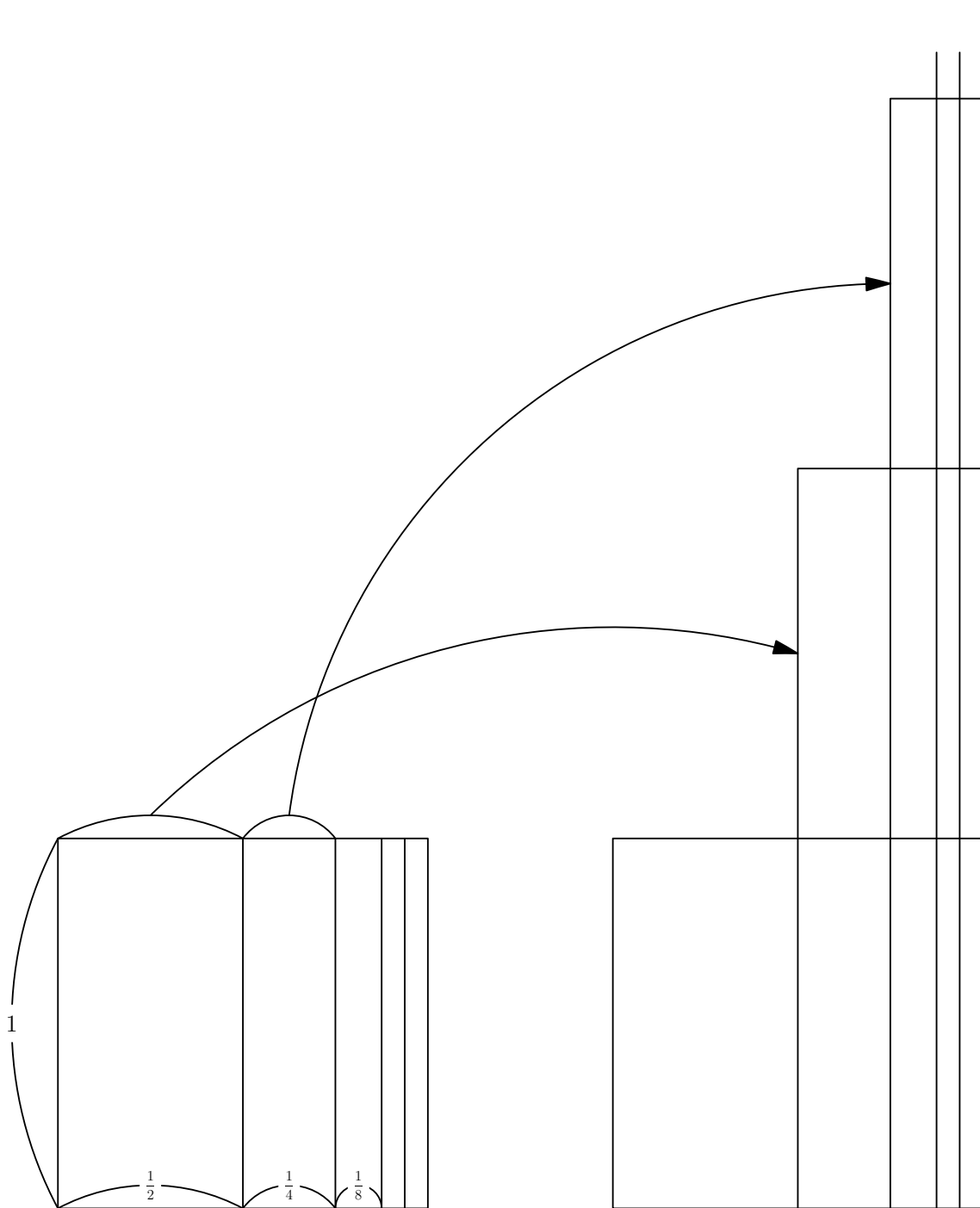
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

すなわち、 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$  であることが分かります (右図)。高さが 1 なので、縦長 長方形の面積は 横幅  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  に一致するからです。オレムは類似の無限等比級数の和も求めています。



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

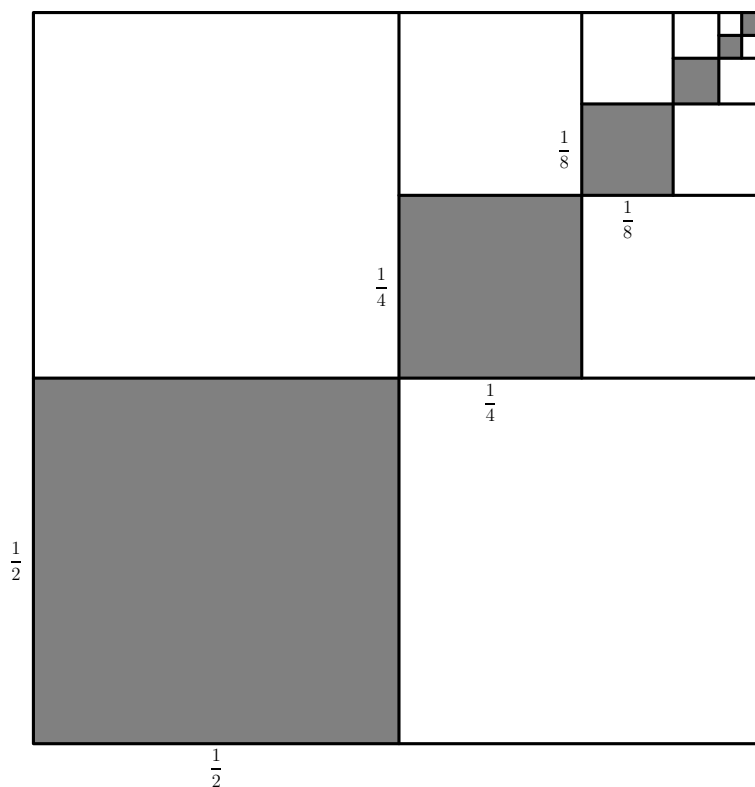
です。今上で使った一辺が 1 の正方形を 2 つ並べます。左側の正方形の左半分を、右側の正方形の右上に載せます。残った左側の長方形の左半分 (巾  $\frac{1}{4}$  の長方形) を、今載せた長方形の右上に載せます。元の右側の正方形の右端の辺を真上に伸ばした直線にピッタリ着けるように載せます。残った左側の長方形の左半分 (巾  $\frac{1}{8}$  の長方形) を、今載せた長方形の右上に載せます。これを続けて行きます。左側の正方形がすべて右側の正方形の上に載った状態で、右側の背が高くなった図形の面積を考えます。元々の右側の正方形の左半分 (何も載っていない部分は、面積  $\frac{1}{2}$  です。その右側の巾  $\frac{1}{4}$  の長方形の上には元の左側の正方形から来た巾  $\frac{1}{2}$  の長方形が載っています。その左半分 (巾  $\frac{1}{4}$  の長方形) は、面積  $\frac{1}{4}$  で、その下には元の右側の正方形の一部、巾  $\frac{1}{4}$  の長方形があります。したがって、巾  $\frac{1}{4}$  の長方形は 2 段に重なっています。下から 3 段目には巾  $\frac{1}{4}$  の長方形が載っていて、その左半分 (巾  $\frac{1}{8}$  の長方形) の下には、同じ面積  $\frac{1}{8}$  の長方形があつて、3 段に重なっています。以下同様に見て行くと、巾  $\frac{1}{2^n}$  の長方形は  $n$  段に重なっていることとなります ( $n \geq 1$ )。元々の正方形 2 つを切って並べ替えただけですから、面積を考えると、 $2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \dots$  となるのです。力学の問題を考えるために必要になったとはいえ、見事な推論だと思います。



おまけに、アルキメデスが放物線と直線で囲まれた図形の面積を求めるときに必要な無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

の、図による証明 (Proof without words) を楽しんで下さい。



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3} \text{ の証明}$$

最後に, 忘れられかけている面白い定理を証明します.

定理 単調減少な一般項  $a_n$  を持つ正項級数すなわち,  $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$  なる級数  $\sum a_n$  が収束するための必要十分条件は,  $N = 2^n$  として,  $\sum_{n=0}^{\infty} N a_N$  が収束することである.

(証明)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \dots \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10} + \dots + a_{15}) + (a_{16} + \dots + a_{31}) + \dots \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + \dots + a_8) + (a_{16} + \dots + a_{16}) + \dots \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} N \cdot a_N \quad (N = 2^n). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} N \cdot a_N &= a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + \dots + a_8) + \dots \\ &= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + (a_8 + a_{16} + \dots + a_{16}) + \dots \\ &\leq (a_1 + a_1) + (a_2 + a_2 + a_3 + a_3) + (a_4 + a_4 + a_5 + a_5 + a_6 + a_6 + a_7 + a_7) + (a_8 + a_8 + \dots + a_{15} + a_{15}) + \dots \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} N \cdot a_N \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$



が成り立つ ( $N = 2^n$ ). この不等式より,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が有界ならば  $\sum_{n=0}^{\infty} N \cdot a_N$  が有界であり, 逆に  $\sum_{n=0}^{\infty} N \cdot a_N$  が有界ならば  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が有界であることが明らかである. 正項級数収束の必要十分条件は有界になることだから, 定理は証明された.

(証明終)

(注) これをコーシーの圧縮定理 (**Cauchy's condensation theorem**) という.

例 リーマンのゼータ関数 (Riemann zeta function)  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  ( $s > 0$ ) は  $s > 1$  のとき収束し,  $s \leq 1$  のとき発散する.

(コーシーの圧縮定理を用いる解)  $a_n = \frac{1}{n^s}$  は単調減少だから, 定理が使える.  $N = 2^n$  として,

$$\sum_{n=0}^{\infty} N \cdot a_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N}{N^s} = \sum_{n=0}^{\infty} N^{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n.$$

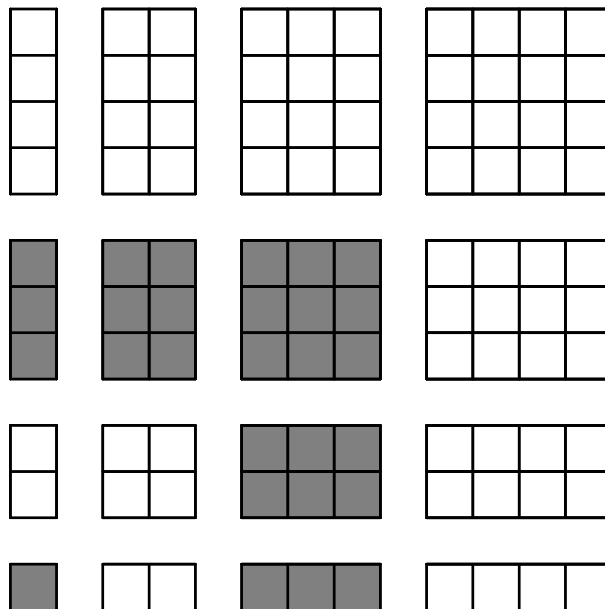
これは公比  $r = 2^{1-s}$  の等比級数である. したがって,  $0 < r < 1 \iff s > 1$  のとき収束し,  $1 \leq r \iff s \leq 1$  のとき発散する.

(証明終)

以上, 無限級数の歴史から, 思いがけない定理の証明までを述べました.

《おまけ》  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  の証明.

厚さが1で, 一辺が  $1+2+3+\dots+n$  の正方形を縦・横に切ります. 正方形の左下から, 縦横ともに,  $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+(n-1)$  のところで切ったら, 左下に一辺が1の立方体が残ります. そのすぐ右上の  $2 \times 2$  の正方形の上に, そのすぐ下と左の  $1 \times 2$  の長方形を載せると, 一辺が2の立方体になります. 今度は, そのすぐ右上の  $3 \times 3$  の正方形の上に, そのすぐ下の  $1 \times 3$  と  $2 \times 3$  の長方形を載せ, そのすぐ左の  $1 \times 3$  と  $2 \times 3$  の長方形も載せると, 一辺が3の立方体になります. さらに, そのすぐ右上の  $4 \times 4$  の正方形の上に, そのすぐ下の  $1 \times 4$  と  $3 \times 4$  の長方形を載せ, 左の  $1 \times 4$  と  $3 \times 4$  の長方形も載せ, 下と左に残っている  $2 \times 4$  の長方形をその上に載せると一辺が4の立方体になります. 以下同様に続ければ証明完了です.



一辺が  $1+2+3+4$  の正方形を, 縦横ともに,  $1, 1+2, 1+2+3$  のところで切った図

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2k = (1 + 2k) + \{2 + (2k - 1)\} + \{3 + (2k - 2)\} + \dots + \{k + (k + 1)\}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (2k + 1) = \{1 + (2k + 1)\} + (2 + 2k) + \dots + \{k + (k + 2)\} + (k + 1)$$

(完)

# Secret of ISAC Polyenes

等電非環式ポリエンの秘密

細矢治夫 お茶大 (名誉)

日本フィボナッチ協会

第17回研究集会

東京理科大学・神楽坂

2019年8月23日

“ ISAC polyene ”とは何か

「等電非環式共役ポリエー」  
とは何か

cf. 前回の発表

# Isospectral graph のその後の展開

細矢治夫 お茶大 (名誉)

日本フィボナッチ協会  
第16回研究集会

東京理科大学・神楽坂

2018年8月24日

## 前々回の発表の要約

- 1) Isospectral graph の紹介
- 2) Endospectral graph とその限界
- 3) Multiplet dormant の発見とその意義
- 4) Dormant を探す Topological index  $Z$  の役割
- 5) 様々な Dormant の発見

Dormant and Sprouts Generating Isospectral Tree Graphs.

I. Facts. H. Hosoya, *MATCH*, **80** (2018) 393.

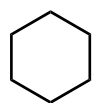
II. Theory. H. Hosoya, *MATCH*, **81** (2019) 485.

数学における **spectrum** とは

グラフ  $G$  の特性多項式  $P_G(x)=0$  の解

$$P_G(x) = (-1)^N \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$$

例



$$P_G(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4 = 0$$

$x = \{2, 1, 1, -1, -1, -2\}$  : spectrum

$$\text{HMO} : E_\pi = 2(2+1+1) = 8$$

ヒュッケル分子軌道法

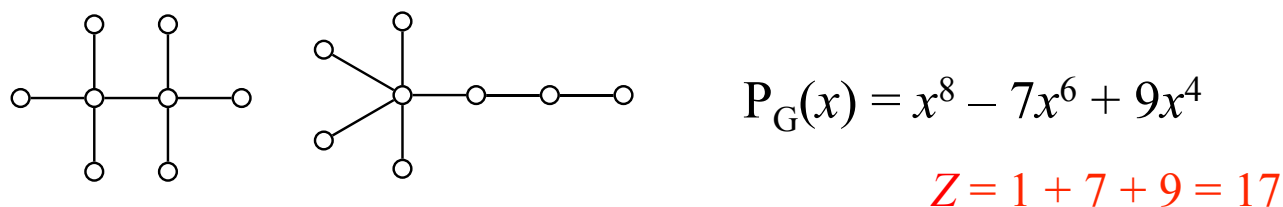
# Cospectral graph = Isospectral graph

数学 (グラフ理論)      数理化学・数理物理

要するに

ヒュッケルMOが同じグラフ のこと  
 ここでは、ひとまず tree graph だけを考える。

最小の isospectral graph 対 (IS対) は



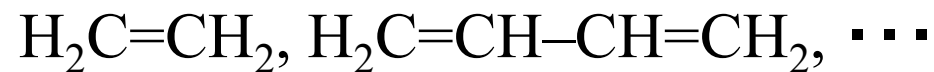
なお、 $(\bullet, \bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet) = (\bullet-\bullet, \bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet)$   $P_G(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2$

の類はひとまず除外。

isospectral graph は「等電グラフ」と呼ぶことに。

次に “acyclic conjugated polyene”  
「非環式共役ポリエン」とは

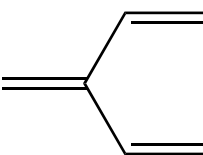
Ethylene, Butadiene, Hexatriene, ..., Polyacetylene



グラフで描けば



これは 1-factor のある path graph

Conjugated polyene とは  等々。「共役ポリエン」

Acyclic とは tree graph のこと。「非環式」



即ち

I so

S pectral

A cyclic

C onjugated

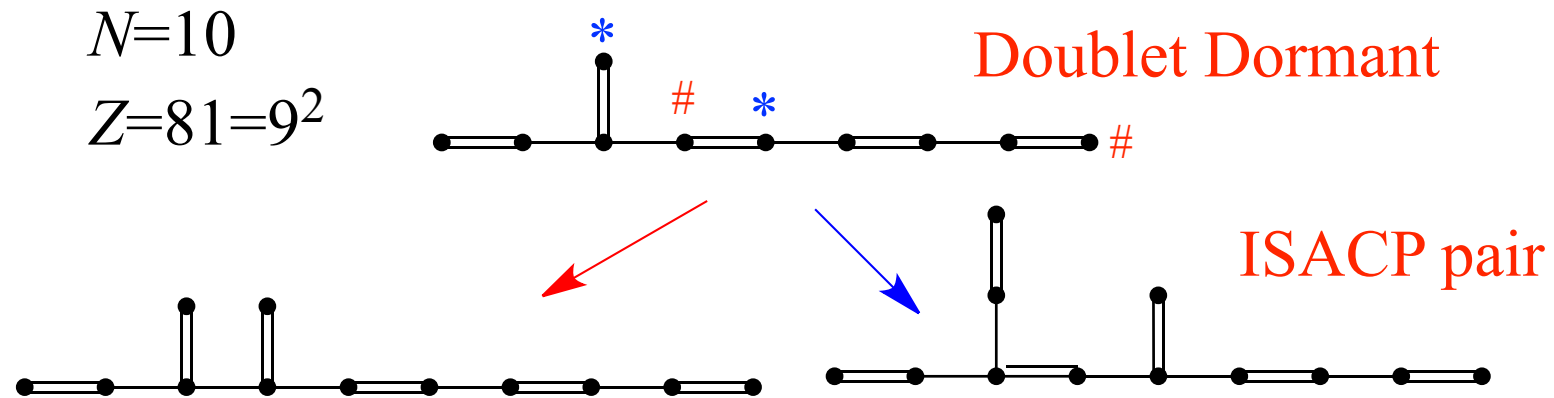
Polyene

等電非環式共役ポリエン

## 数理化学で分かっていること

N	異性体数	ISACP	成長	平方数Z
2	1	0	0	0
4	1	0	0	0
6	2	0	0	0
8	4	0	0	0
10	11	0	0	0
12	30	1	1	1
14	96	4	1	1
16	319	27	$\geq 8$	3
18	1135	$\sim 200$	?	?

# 最小 ISAC Polyene 対



{	Characteristic polynomial	$N=12$
	$P_G(x) = x^{12} - 11x^{10} + 43x^8 - 73x^6 + 53x^4 - 14x^2 + 1$	$Z=196=14^2$
	Z-counting polynomial	
	$Q_G(x) = 1 + 11x + 43x^2 + 73x^3 + 53x^4 + 14x^5 + x^6$	平方数 Z
Topological index Z		
	$Z = 1 + 11 + 43 + 73 + 53 + 14 + 1 = 196$	↙

Tree graphについての便利な性質

# Dormant とは何か

本来 “dormant” は、

冬眠している、

潜伏している

という意味の形容詞。

それを、敢えて、名詞として使うことにした。

「眠り姫」のような意味合いで。

H. Hosoya, **Dormant and sprouts generating isospectral tree graphs. I. Facts, and II. Theory**, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **80** (2018) 393, **81** (2019) 485.

が印刷されたので、

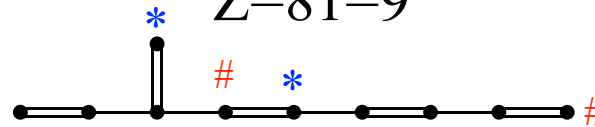
今後は大手を振って使うことができる。

皆さんも使ってください。

# 成長する ISAC Polyene 対

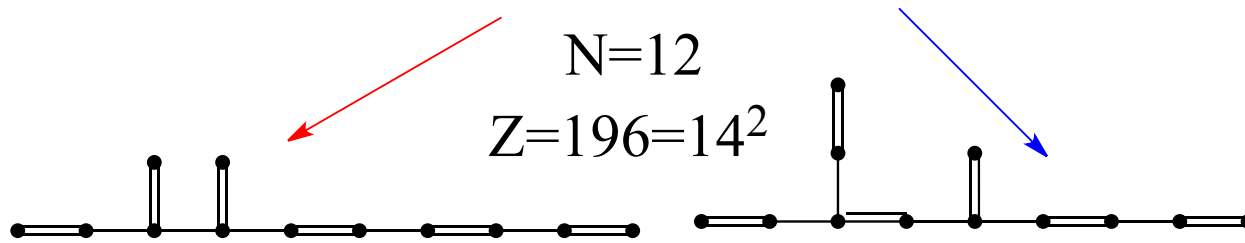
N=10

Z=81=9<sup>2</sup>



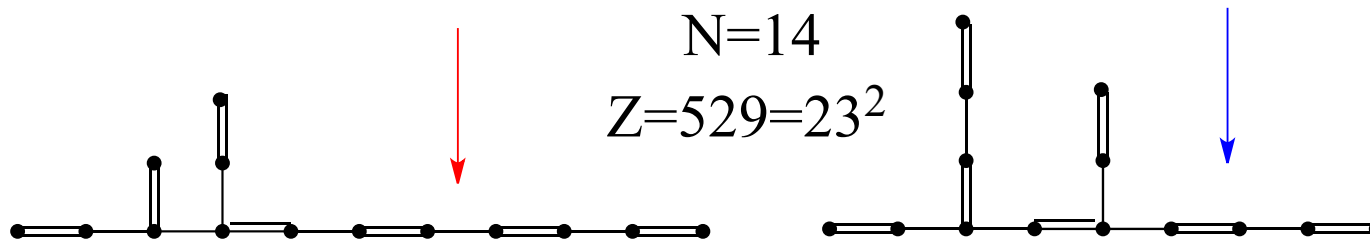
N=12

Z=196=14<sup>2</sup>



N=14

Z=529=23<sup>2</sup>



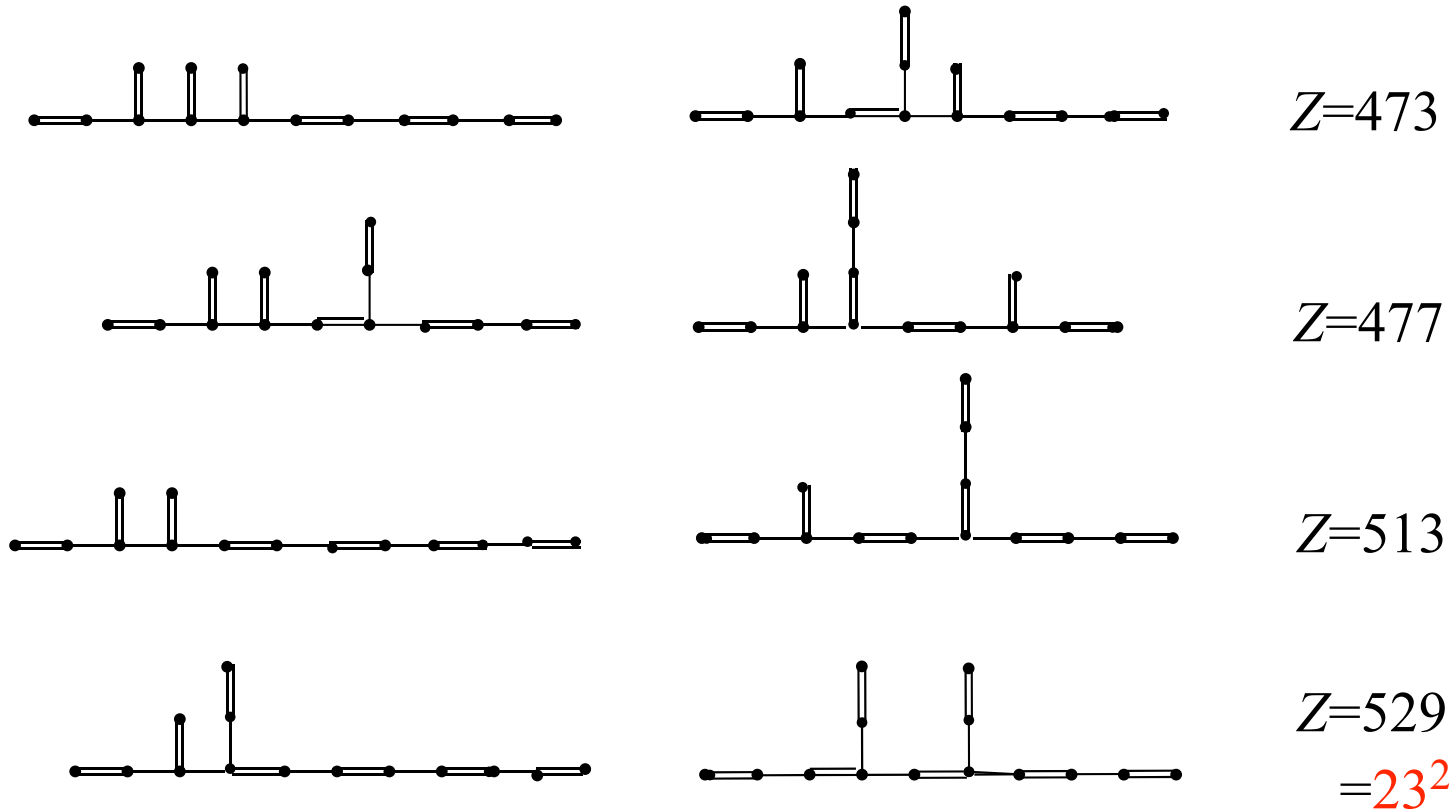
growing

Note that 9 + 14 = 23

平方数 Z

How about for  $N=14$  cases?

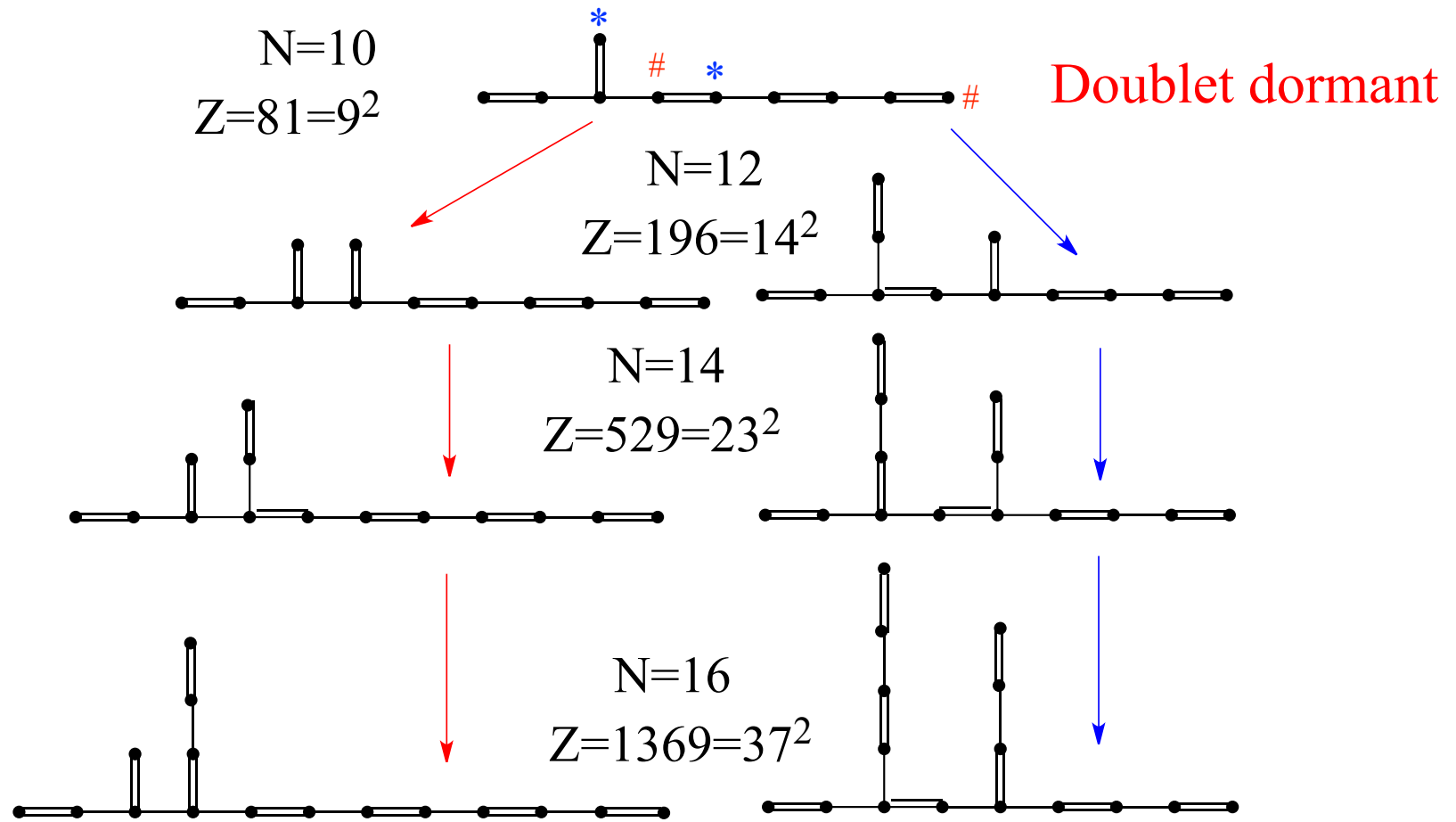
4 ISACP pairs are found



But

Only  $Z=23^2$  pair grows.

As already shown before.

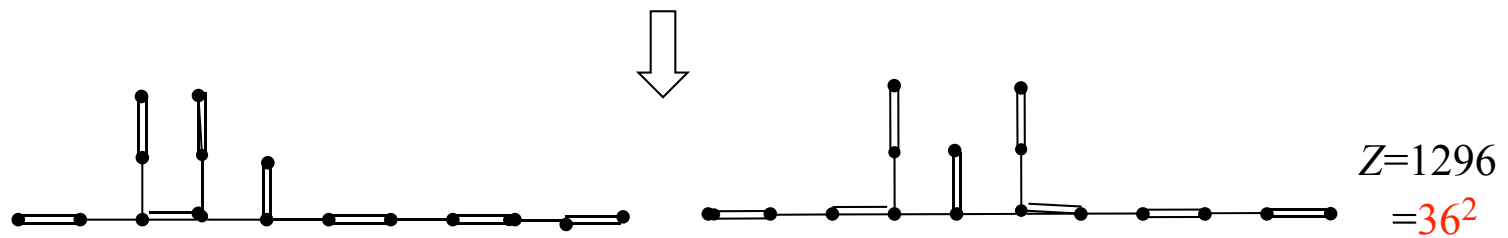
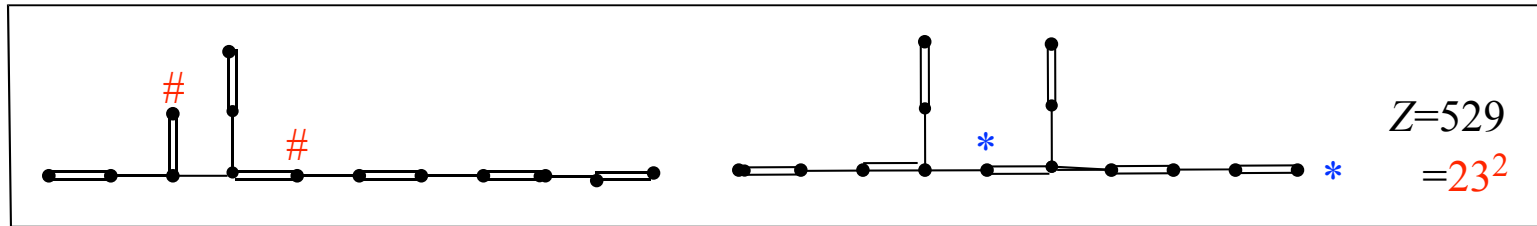
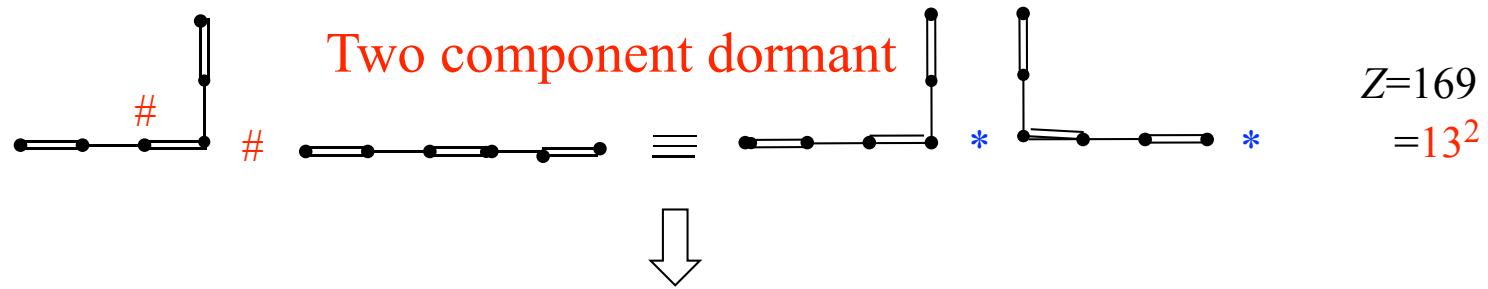


Note that  $9+14=23$ ,  $14+23=37$  and further

$$Z_n = 2Z_{n-1} + 2Z_{n-2} - Z_{n-3}$$


平方数  $Z$

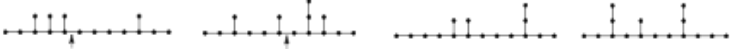

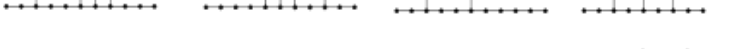





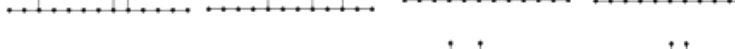
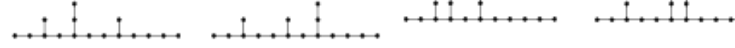


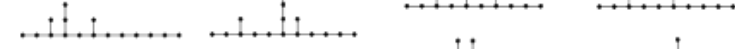

# Z=529 対の別の成長ルート



Note that  $13+23=36$ .

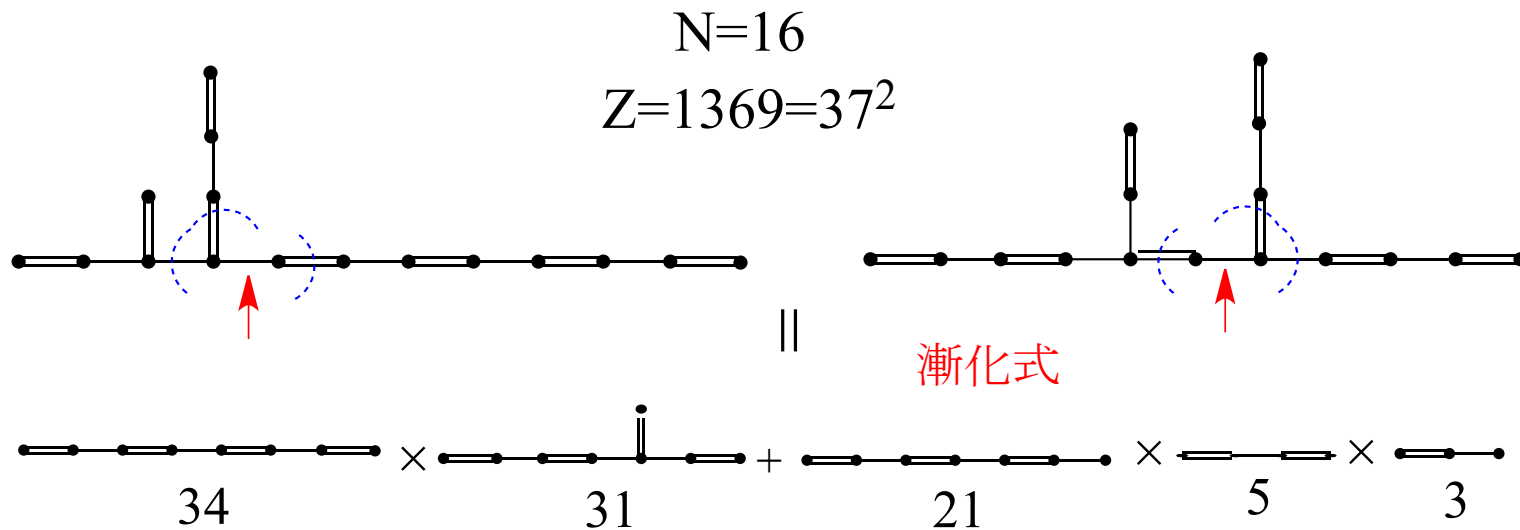


How about for the next  $N=16$  cases — with  27 ISAC pairs?

		<b>Z = 1252</b>
Z = 1127		1252
1148		<b>1258</b>
<b>1156 = 34<sup>2</sup></b>		1263
1172		1269
1191		1278
1208		<b>1290</b>
<b>1213</b>		<b>1296 = 36<sup>2</sup></b>
1220		1300
1233		<b>1327</b>
1234		1339
1239		1348
1241		<b>1369 = 37<sup>2</sup></b>
<b>1249</b>		1412

Bold face: Growing ISACP 8 pairs

# Intrinsic isospectral pair (1) (平方数 $Z$ )



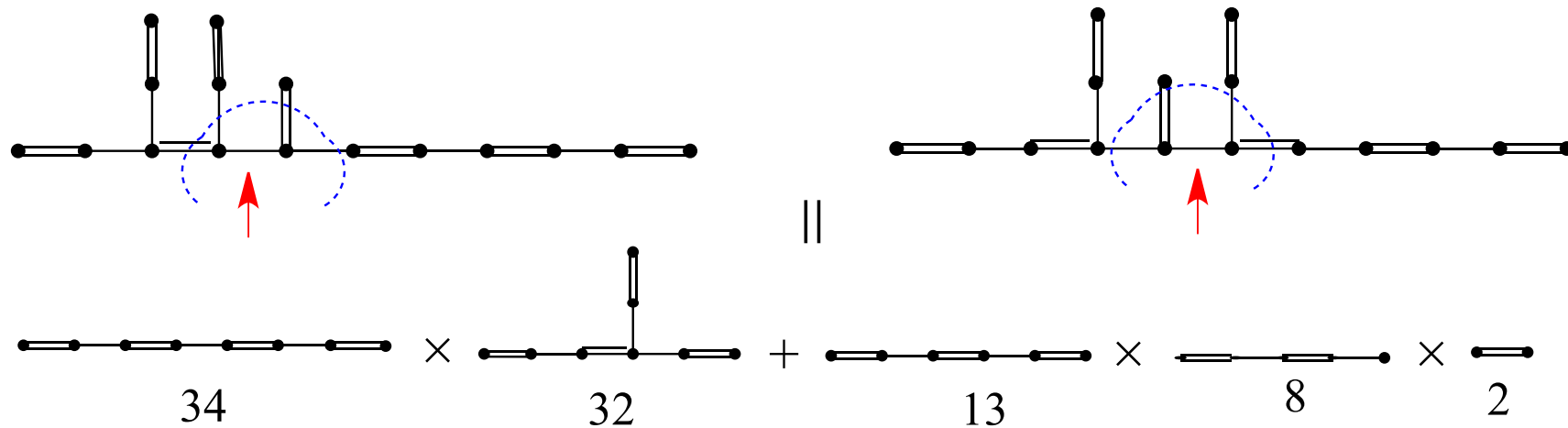
They are intrinsic isospectral.

Rigorous proof should be performed by using the  $Z$ -counting polynomial.

# Intrinsic isospectral pair (2) (平方数 $Z$ )

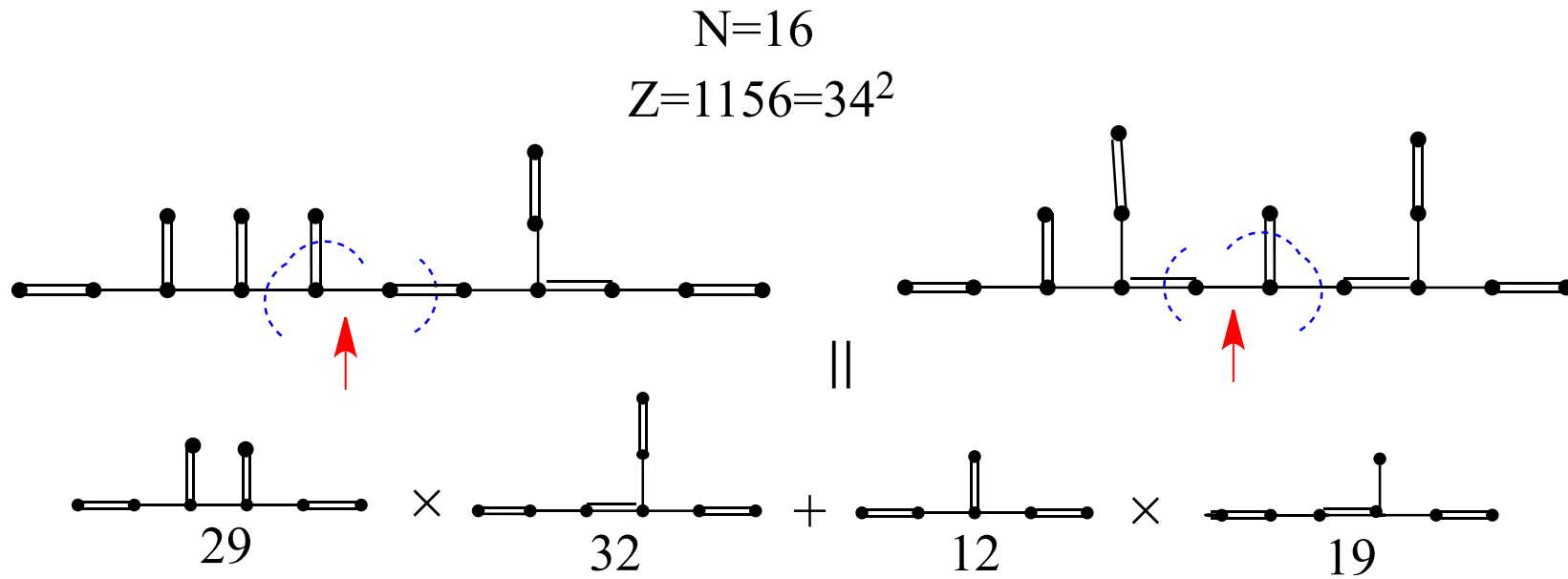
$N=16$

$Z=1296=36^2$



They are intrinsic isospectral.

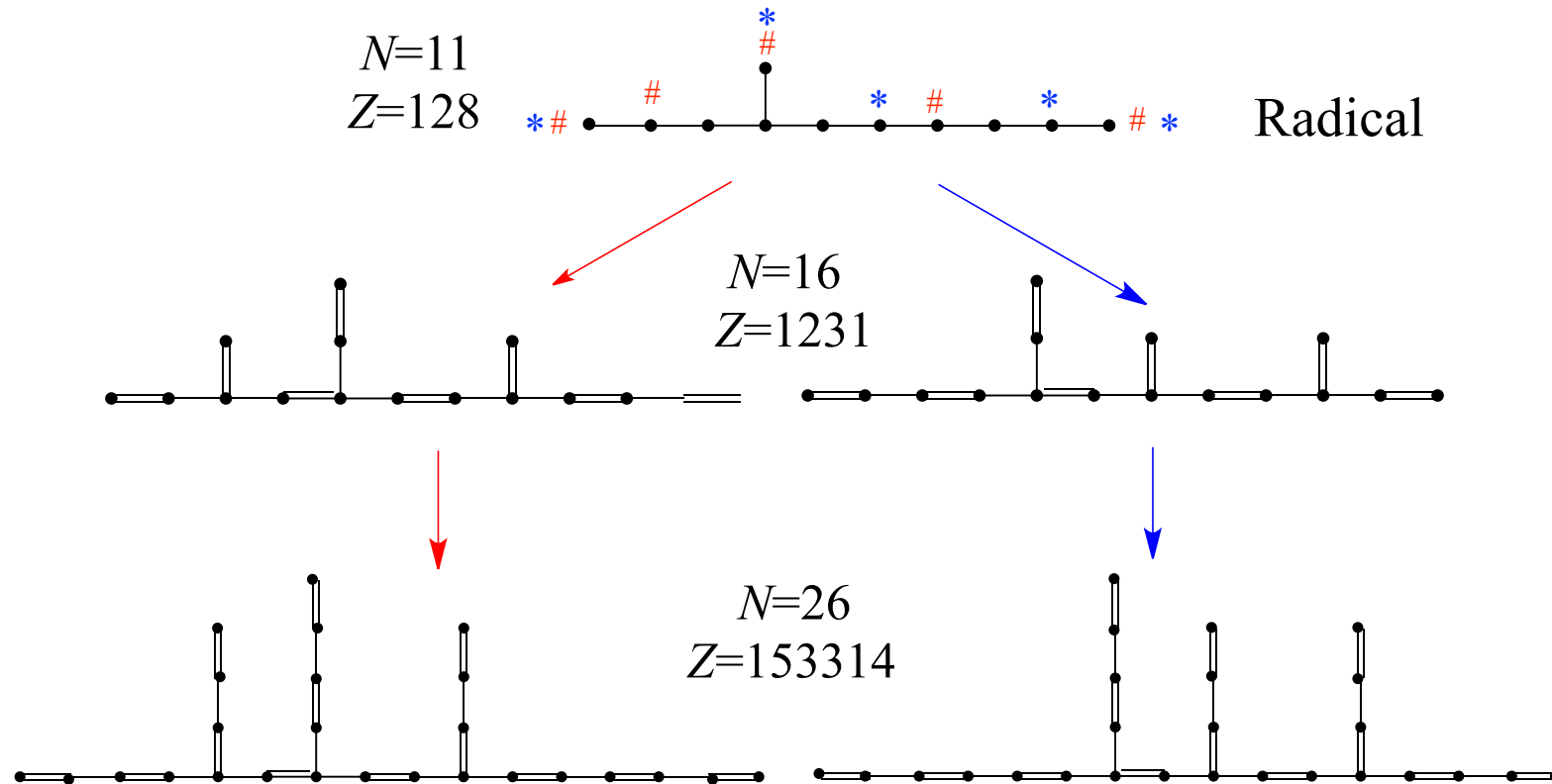
# Intrinsic isospectral pair (3) (平方数 $Z$ )



They are intrinsic isospectral.

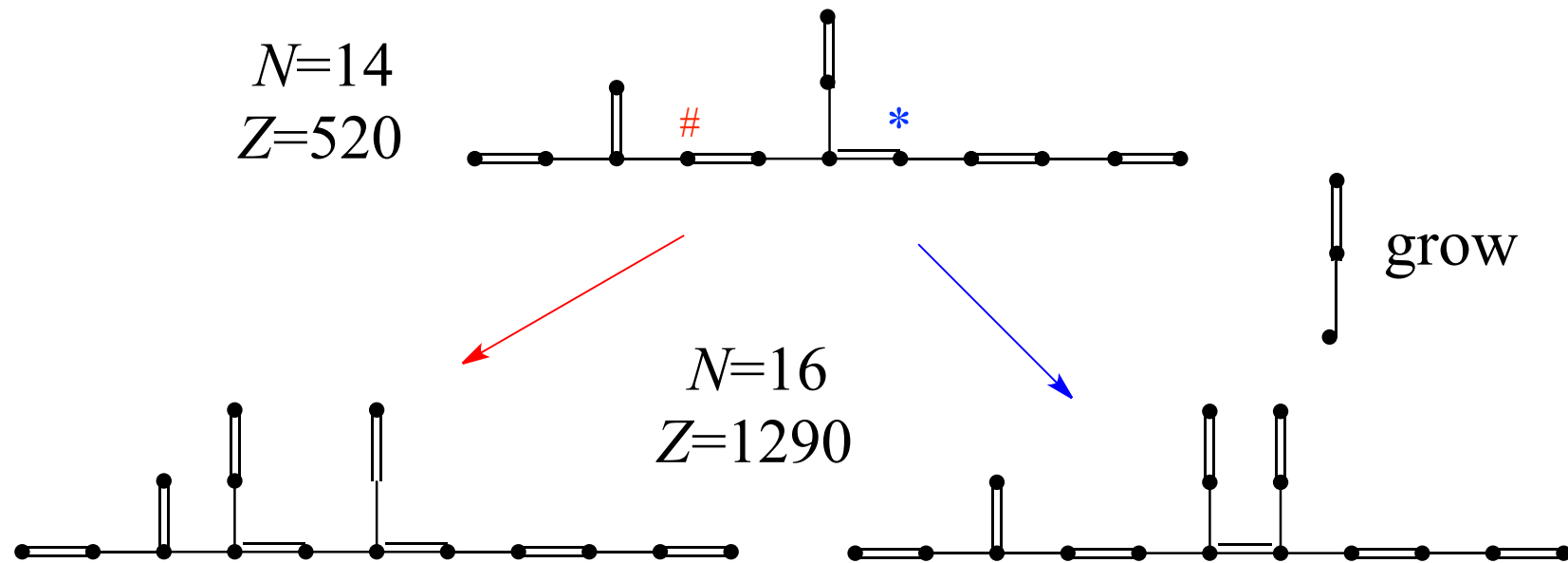
平方数  $Z$  以外でも面白い  
 $N = 16$  (1)

Quintuplet Dormant



平方数  $Z$  以外でも面白い  
 $N = 16$  (2)

Singlet Dormant

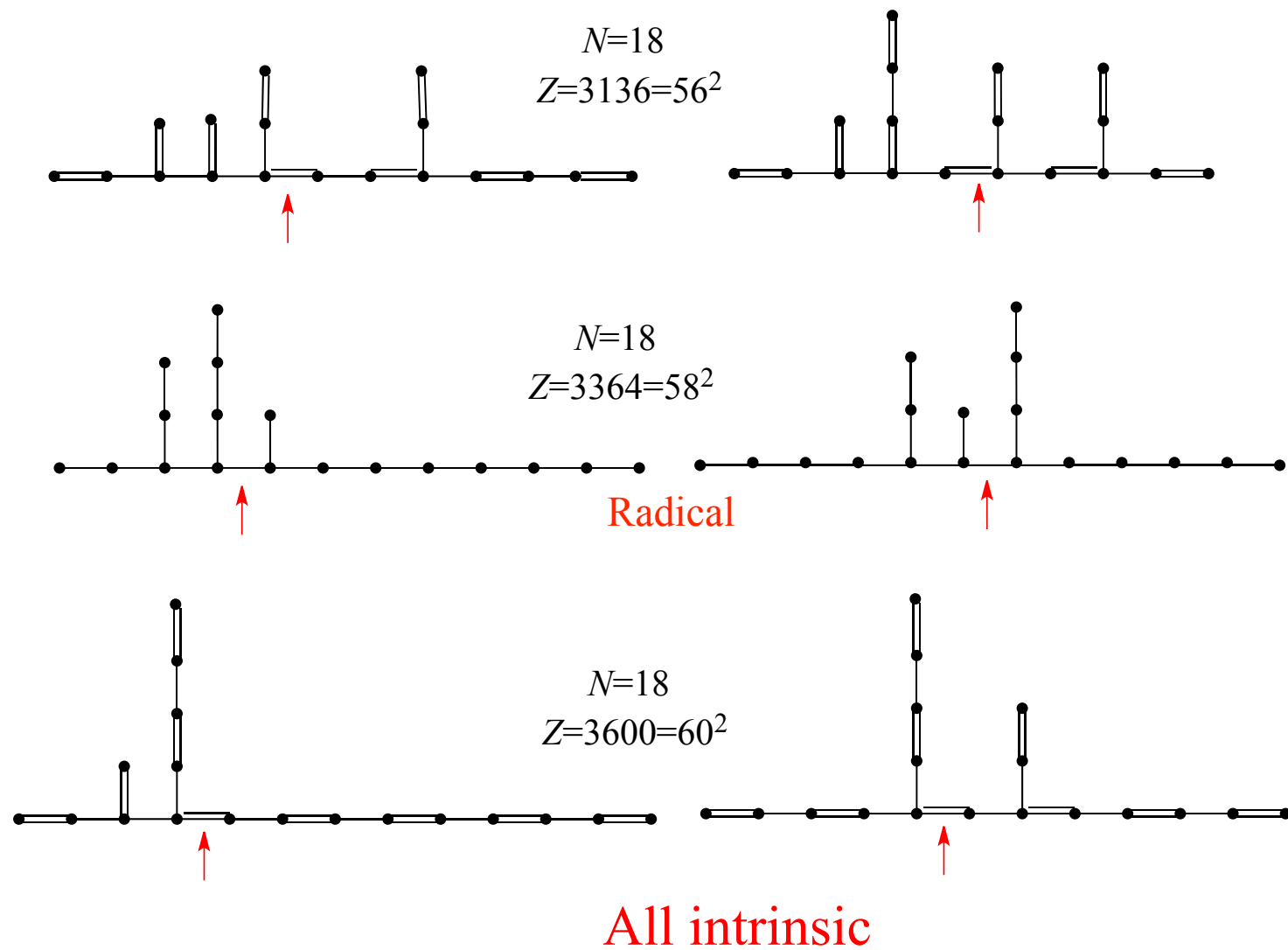


他に triplet dormant から成長した ISACP 対等も

## 次の問題

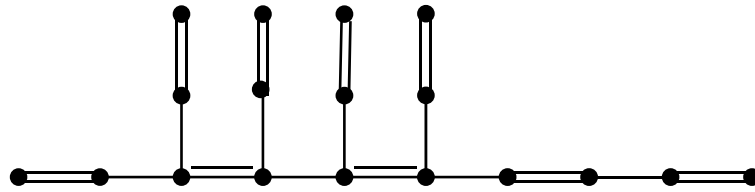
N	異性体数	ISACP	成長	平方数Z
2	1	0	0	0
4	1	0	0	0
6	2	0	0	0
8	4	0	0	0
10	11	0	0	0
12	30	1	1	1
14	96	4	1	1
16	319	27	$\geq 8$	3
$\Rightarrow$ 18	1135	$\sim 200$	?	?

# $N=18$ の平方数 $Z$ の ISACP 対





# $N=18$ の ISACP trio



$N=18$   
 $Z=3328$



Interesting but  
from no dormant, non-growing, non-intrinsic

$N=18$  の ISACP については

未だ未だほとんど分っていない  
というのが実情

更にその先は？

でも、宝の山があるかも知れない

乞おう、御期待

# 分割数を参照してフィボナッチ (リュカ) 数の拡張を試みる

萩原幸男 (公財) 地震予知総合研究振興会

要旨 分割数の生成関数を変数  $x$  の無限乗積  $\prod (1 - x^n)^{-1}$  により与えられる. この式を参照してリュカ数  $L_n$  の生成関数の分母  $(1 - x - x^2)^{-1}$  を  $\exp(\sum L_n x^n / n)$ ,  $\prod (1 - x^n)^{-L(n)}$  と置いて, 分割数とリュカ数を結びつける.

## 1. 分割数と約数関数

自然数  $n$  の分割数  $p(n)$  とその生成関数  $P(x)$  は次式によって与えられる.

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} \quad (|x| < 1) \quad (1)$$

$P(x)$  の  $x$  に関する微分を  $P'(x)$  とし, 式(1)の両辺の  $x$  に関する微分式をつくれればランバート級数となる. そのため約数関数  $\sigma(n)$  により表すことができる. すなわち

$$P'(x)/P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}/(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^{n-1} \quad (2)$$

となる. さらに  $p(n)$  を用いて書き直せば次式を得る.

$$p(0) = 1, \quad np(n) = \sum_{k=0}^{n-1} p(k) \sigma(n - k) \quad (n \geq 1) \quad (3)$$

約数関数の値を知れば, 分割数は上式から計算できる.

また分割数では  $N$  を上限 ( $n \leq N$ ) とする生成関数

$$P_N(x) = \prod_{n=1}^N (1 - x^n)^{-1} \quad (|x| < 1) \quad (4)$$

を取り扱うことがある. 式(2)と同様の操作を施せば

$$P_N'(x)/P_N(x) = \sum_{n=1}^N nx^{n-1}/(1 - x^n) = \sum_{n=1}^N s_N(n)x^{n-1} \quad (5)$$

となり, ここに次式は  $N$  を上限とする約数関数に相当する.

$$s_N(n) = \sum_{k | n, k \leq N} k \quad (6)$$

## 2. 分割数とリュカ数との対応

分割数の生成関数を構成する基本式は  $1 - x$  である. これに対してフィボナッチ数  $F_n$  とリュカ数  $L_n$  の生成関数に共通する分母は  $1 - x - x^2$  である. この両式の比較が分割数とフィボナッチ (リュカ) 数の対応関係を与えると考えられる.

さてよく知られた数学公式に次の式がある.

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n \quad (|x| < 1) \quad (7)$$

これは分割数の生成関数の基本である。他方これに対応する  $L_n$  の基本式に

$$\ln(1-x-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n/n \quad (8)$$

がある。すなわち

$$(1-x-x^2)^{-1} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n/n\right) \quad (|x(1+x)| < 1) \quad (9)$$

一方分割数の生成関数に似せて

$$(1-x-x^2)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\lambda(n)} \quad (|x(1+x)| < 1) \quad (10)$$

と置くものとすれば  $\lambda(n)$  はどのような値をとるであろうか。式(9)と(10)の右辺を等しいと置いて  $x$  について微分すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda(n) x^{n-1}/(1-x^n) \quad (11)$$

となる。右辺はランバート級数である。さらにこの式から

$$L_n = \sum_{k|n} k \lambda(k) \quad (12)$$

が得られる。 $L_n$  は既知であるから  $\lambda(n)$  値は求められる。 $\lambda(n)$  値を文末の表 1 に示す。

### 3. フィボナッチ (リュカ) 数の拡張

分割数の  $N$  を上限とする生成関数式(4)を参照してフィボナッチ (リュカ) 数の生成関数の分母を拡張する。ここでは

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(N)} x^n = \prod_{n=1}^N (1-x^n-x^{2n})^{-1} \quad (13)$$

と置くときの  $G_n^{(N)}$  値を求める。

まず低次の  $N$  について漸化式を導く。式(13)より

$$1-x^N-x^{2N} = \prod_{n=1}^{N-1} (1-x^n-x^{2n})^{-1} \quad (14)$$

は自明である。とくに  $N=1$  の場合には

$$(1-x-x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(1)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n \quad (15)$$

すなわち  $G_n^{(1)} = F_{n+1}$  より出発し、高次の項を次の漸化式により求めることができる。

$$G_n^{(N)} = G_{n-N}^{(N)} + G_{n-2N}^{(N)} + G_n^{(N-1)} \quad (16)$$

また次式の成立も確かめられる。

$$G_n^{(N)} = \sum_{k=0}^{[n/N]} G_k^{(1)} G_{n-kN}^{(N-1)} \quad (17)$$

次に  $N \rightarrow \infty$  の場合を解く。式(9)において右辺の  $n$  を  $k$  に、さらに両辺の  $x$  を  $x^n$  に置き換えて、 $n$  に関する乗積をとれば

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n - x^{2n})^{-1} = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} L_k x^k / \{k(1 - x^k)\}\right] \quad (18)$$

を得る。ここに  $g_{\infty}(x)$  および  $G_n^{(\infty)}$  と記すべきところ  $\infty$  を省略している。

ここで式(18)の両辺を  $x$  について微分し、さらに両辺の  $x^n$  の係数を比較することにより次式が得られる。すなわち

$$G_0 = 1, \quad n G_n = \sum_{m=1}^n G_{n-m} \mu(m) \quad (n \geq 1) \quad (19)$$

ここに

$$\mu(m) = m \sum_{k|m} (L_k / k) \quad (20)$$

これらの式から  $G_n$  の数値が求められる。漸化式(16)を高次の  $N$  まで解けば、 $G_n^{(N)}$  の数値は  $G_n$  に一致する。表1に  $\mu(n)$  および  $G_n$  の数値を  $\lambda(n)$  (式(12))とともに列挙する。

表1  $\lambda(n)$ ,  $\mu(n)$  および  $G_n$  の数値

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(n)$	—	1	1	1	1	2	2	4	5	8	11
$\mu(n)$	—	1	5	7	17	16	41	36	81	97	170
$G_n$	1	1	3	5	11	18	36	59	109	181	318

## 黄金比 $\phi$ の連分数表示

### 1 はじめに

#### 1.1 黄金比

黄金比  $\phi$  は、Fibonacci 数の漸化式  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  の特性方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  の解の一つであり、具体的には  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  である。また  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$  でもある [1][2][4][5]。この報告書では、黄金比を種々の無限連分数で表してみる。

#### 1.2 連分数とその表示

連分数は、次に示すように分数の分母が入れ子になった分数である [6][7][8][10]。

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}}$$

いつもこのように表示すると場所をとるので、次のようにも表記することにする。

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}} \\ = b_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right)$$

また、すべての部分分子  $a_n$  が  $a_n = 1$  の時、正則連分数と呼び

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_4 + \dots}}}} \\ = [b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots]$$

と表記することも多い。よく知られたように、黄金比  $\phi$  の正則連分数展開は、

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

である。

### 1.3 $\sqrt{5}/2$ の正則連分数展開

$\sqrt{5}/2$  の正則連分数展開は、

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = [1, \overline{8, 2}]$$

である。よって、主近似分数は、展開を途中で打ち切って次のようになる。

$$1, \frac{9}{8}, \frac{19}{17}, \frac{161}{144}, \frac{341}{305}, \dots$$

### 2 平方根の連分数展開

#### 2.1 連分数展開の導出

$b > 0, c \neq 0, b + c \neq 0$  とする。

$$b - c = \frac{b^2 - c^2}{b + c} \\ = \frac{b^2 - c^2}{2c + (b - c)} \\ = \frac{b^2 - c^2}{2c} + \frac{b^2 - c^2}{2c} + \frac{b^2 - c^2}{2c} + \dots$$

従って、 $b = \sqrt{a}$  のとき、

$$\sqrt{a} = c + \frac{a - c^2}{2c} + \frac{a - c^2}{2c} + \frac{a - c^2}{2c} + \dots$$

が得られる。さらに  $c = m/n$  のとき、まとめると、

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \left( \frac{an^2 - m^2}{2m} + \frac{an^2 - m^2}{2m} + \frac{an^2 - m^2}{2m} + \dots \right)$$

となる。黄金比  $\phi$  は、 $\phi = 1/2 + \sqrt{5}/4$  にて求められる。以下いくつか例示する。

##### 2.1.1 例 1

$a = 5/4, m = 2, n = 2$  のとき、

$$\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ = \frac{1}{2} + \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots \right) \right] \\ = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

### 2.1.2 例2

$a = 5/4, m = 9, n = 8$  のとき、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{18} - \frac{1}{18} - \dots \right) \right] \\ &= \frac{13}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{18} - \frac{1}{18} - \dots \right)\end{aligned}$$

### 2.1.3 例3

$a = 5/4, m = 38, n = 34$  のとき、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{19}{17} + \frac{1}{34} \left( \frac{1}{76} + \frac{1}{76} + \frac{1}{76} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{55}{34} + \frac{1}{34} \left( \frac{1}{76} + \frac{1}{76} + \frac{1}{76} + \dots \right)\end{aligned}$$

### 2.1.4 例4

$a = 5/4, m = 161, n = 144$  のとき、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{161}{144} - \frac{1}{144} \left( \frac{1}{322} - \frac{1}{322} - \frac{1}{322} - \dots \right) \right] \\ &= \frac{233}{144} - \frac{1}{144} \left( \frac{1}{322} - \frac{1}{322} - \frac{1}{322} - \dots \right)\end{aligned}$$

### 2.1.5 例5

$a = 5/4, m = 682, n = 610$  のとき、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \left[ \frac{341}{305} + \frac{1}{610} \left( \frac{1}{1364} + \frac{1}{1364} + \frac{1}{1364} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{987}{610} + \frac{1}{610} \left( \frac{1}{1364} + \frac{1}{1364} + \frac{1}{1364} + \dots \right)\end{aligned}$$

## 2.2 予想

以上のことから、次の式が予想される。

$$\phi = \frac{F_{3n+1}}{F_{3n}} \pm \frac{1}{F_{3n}} \left( \frac{1}{L_{3n} \pm L_{3n} \pm L_{3n} \pm \dots} \right)$$

ただし、上式で + は  $n$  が奇数の時で、- は  $n$  が偶数の時である。

## 2.3 3の倍数以外の場合

上の予想は、実はすべての  $n$  について成立する。よく知られたように、Lucas 数  $L_n$  は  $\phi^n$  と次の関係がある。

$$\begin{aligned}L_n &= \phi^n + (-\phi)^{-n} \\ &= \phi^n + \frac{(-1)^n}{\phi^n} \\ \therefore \phi^n &= L_n - \frac{(-1)^n}{\phi^n} \\ &= L_n - \frac{(-1)^n}{L_n} - \frac{(-1)^n}{L_n} - \frac{(-1)^n}{L_n} - \dots \\ &= L_n \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \dots\end{aligned}$$

ただし、+ は  $n$  が奇数の時で、- は  $n$  が偶数の時である。

一方、よく知られた  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$  と帰納法で証明できる  $\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}$  とから、

$$\begin{aligned}\phi F_n &= \phi^n - F_{n-1} \\ &= \phi^n - (L_n - F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} + (\phi^n - L_n) \\ \therefore \phi &= \frac{F_{n+1}}{F_n} + \frac{1}{F_n} (\phi^n - L_n)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\phi = \frac{F_{n+1}}{F_n} \pm \frac{1}{F_n} \left( \frac{1}{L_n \pm L_n \pm L_n \pm \dots} \right)$$

が成り立つ。この式は初出ではなく、どこかで見た記憶がある。ご存知の方がいらっしゃれば、教えていただきたい。

## 2.4 連分数の等価変換と縮約

### 2.4.1 等価変換

ここでは、次の等価変換を紹介する。 $c \neq 0$  とするとき、次式が成り立つ。

$$\frac{a_{m-1}}{b_{m-1} + b_m} + \frac{a_m}{b_{m+1} + b_{m+2}} + \cfrac{\infty}{\text{K}} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a_{m-1}}{b_{m-1} + c b_m} + \frac{c a_m}{b_{m+1} + c b_{m+2}} + \cfrac{\infty}{\text{K}} \left( \frac{a_n}{b_n} \right)$$

分数の分母分子に定数  $c$  を掛けただけである。

### 2.4.2 縮約

この等価変換を用いると、次の式変形が成立する。 $\frac{a_m}{b_m}$  で縮約をかける。 $X = \prod_{n=m+2}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  として、

$$\begin{aligned}
& \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + X \\
&= \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{a_m(b_{m+1} + X)}{b_m(b_{m+1} + X) + a_{m+1}} \\
&= \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{a_m/b_m [b_m(b_{m+1} + X) + a_{m+1}] - a_m a_{m+1}/b_m}{b_m(b_{m+1} + X) + a_{m+1}} \\
&= \frac{a_{m-1}}{b_{m-1} + a_m/b_m} - \frac{a_m a_{m+1}/b_m}{a_{m+1} + b_m b_{m+1}} + b_m X \\
&= \frac{a_{m-1}}{b_{m-1} + a_m/b_m} - \frac{(a_m/b_m)(a_{m+1}/b_m)}{a_{m+1}/b_m + b_{m+1}} + X \\
&= \frac{a_{m-1} b_m}{a_m + b_{m-1} b_m} - \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+1} + b_m b_{m+1}} + b_m X
\end{aligned}$$

### 2.4.3 偶数部分 (even part)

$b_{2m} \neq 0$  とする。次の無限連分数展開を  $\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_4}{b_4}, \frac{a_6}{b_6}, \dots$  で順に縮約をかけると、

$$\begin{aligned}
& b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots \\
&= b_0 + \frac{a_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2} - \frac{a_2 a_3 b_4/b_2}{a_4 + b_3 b_4 + a_3 b_4/b_2} - \frac{a_4 a_5 b_6/b_4}{a_6 + b_5 b_6 + a_5 b_6/b_4} - \dots \quad (\text{canonical}) \\
&= b_0 + \frac{a_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{b_2(a_4 + b_3 b_4) + a_3 b_4} - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{b_4(a_6 + b_5 b_6) + a_5 b_6} - \\
& \quad \frac{a_6 a_7 b_4 b_8}{b_6(a_8 + b_7 b_8) + a_7 b_8} - \dots \quad (\text{non canonical})
\end{aligned}$$

となる。ここで canonical とは、元の式の最初の  $2n$  項を通分した結果と、縮約をかけた式の最初の  $n$  項を通分した結果が等しくなる、ということである。

### 2.4.4 奇数部分 (odd part)

$b_{2m+1} \neq 0$  とする。次の無限連分数展開を  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_5}{b_5}, \dots$  で順に縮約をかけると、

$$\begin{aligned}
& b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots \\
&= \frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3/b_1}{b_1(a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5/b_3}{a_5 + b_4 b_5 + a_4 b_5/b_3} - \frac{a_5 a_6 b_7/b_5}{a_7 + b_6 b_7 + a_6 b_7/a_5} - \\
& \quad \frac{a_7 a_8 b_9/b_7}{a_9 + b_8 b_9 + a_8 b_9/a_7} - \dots \quad (\text{canonical}) \\
&= \frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3/b_1}{b_1(a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5}{b_3(a_5 + b_4 b_5) + a_4 b_5} - \\
& \quad \frac{a_5 a_6 b_3 b_7}{b_5(a_7 + b_6 b_7) + a_6 b_7} - \dots \quad (\text{non canonical})
\end{aligned}$$

となる。

### 2.4.5 計算例

例として、 $\phi$  の正則連分数展開に偶数部分と奇数部分を繰り返し適用してみる。まず、偶数部分で縮約した場合、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\phi &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \dots \quad 1 \text{ 回適用} \\
&= 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \dots \quad 2 \text{ 回適用} \\
&= 1 + \frac{21}{34} - \frac{1}{47} - \frac{1}{47} - \frac{1}{47} - \frac{1}{47} - \dots \quad 3 \text{ 回適用} \\
&= 1 + \frac{987}{1597} - \frac{1}{2207} - \frac{1}{2207} - \frac{1}{2207} - \frac{1}{2207} - \dots \quad 4 \text{ 回適用}
\end{aligned}$$

このことから、次の式が予想される。

$$\phi = 1 + \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} - \frac{1}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \dots$$

より一般的には、 $n$  が奇数の時  $+$ 、 $n$  が偶数の時  $-$  として、

$$\phi = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \dots$$

が予想される。



次いで、奇数部分で縮約した場合、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\phi &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots \\
&= \frac{2}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \dots \quad 1 \text{ 回適用} \\
&= \frac{5}{3} - \frac{1}{21} - \frac{3}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \dots \quad 2 \text{ 回適用} \\
&= \frac{34}{21} - \frac{1}{987} - \frac{21}{47} - \frac{1}{47} - \frac{1}{47} - \frac{1}{47} - \dots \quad 3 \text{ 回適用} \\
&= \frac{1597}{987} - \frac{1}{2178309} - \frac{987}{2207} - \frac{1}{2207} - \frac{1}{2207} - \frac{1}{2207} - \dots \quad 4 \text{ 回適用}
\end{aligned}$$

このことから、次の式が予想される。

$$\phi = \frac{F_{2k+1}}{F_{2k}} - \frac{1}{F_{2k+1}} - \frac{F_{2k}}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \frac{1}{L_{2k}} - \dots$$

より一般的には、 $n$  が奇数の時  $+$ 、 $n$  が偶数の時  $-$  として、

$$\phi = \frac{F_{n+1}}{F_n} \pm \frac{1}{F_{2n}} \pm \frac{F_n}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \dots$$

が予想される。

## 2.5 近似精度を高めた $\sqrt{a}$ の連分数展開

先に、 $\sqrt{a}$  の連分数展開式を求めた。

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \left( \frac{an^2 - m^2}{2m} + \frac{an^2 - m^2}{2m} + \frac{an^2 - m^2}{2m} + \dots \right)$$

この式を、 $\sqrt{a}$  を  $m/n$  で近似した式と考え、より近似を高めた式を求めることができる。次にあげる近似式は、Secant 法をもとに導くことができる。導出の詳細は付録 A に記載する。

### 2.5.1 2次収束の式

Newton 法として知られた式である。 $x_n = m/n$  として、次式で  $x_{n+1}$  を求める。

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

代入してまとめると、 $x_{n+1} = \frac{an^2 + m^2}{2mn}$  と求められる。従って、次の式が得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{an^2 + m^2}{2mn} - \frac{1}{2mn} \left( \frac{(an^2 - m^2)^2}{2(an^2 + m^2)} - \frac{(an^2 - m^2)^2}{2(an^2 + m^2)} - \frac{(an^2 - m^2)^2}{2(an^2 + m^2)} - \dots \right)$$

### 2.5.2 3次収束の式

Halley 法として知られた式である。 $x_n = m/n$  として、次式で  $x_{n+1}$  を求める。

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

代入してまとめると、 $x_{n+1} = \frac{m(3an^2 + m^2)}{n(an^2 + 3m^2)}$  と求められる。従って、次の式が得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{m(3an^2 + m^2)}{n(an^2 + 3m^2)} + \frac{1}{n(an^2 + 3m^2)} \left( \frac{(an^2 - m^2)^3}{2m(3an^2 + m^2)} + \frac{(an^2 - m^2)^3}{2m(3an^2 + m^2)} + \frac{(an^2 - m^2)^3}{2m(3an^2 + m^2)} + \dots \right)$$

### 2.5.3 4次収束の式

super Halley 法として知られた式である。 $x_n = m/n$  として、次式で  $x_{n+1}$  を求める。

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n(x_n^2 + a)}$$

代入してまとめると、 $x_{n+1} = \frac{(an^2 + m^2)^2 + 4am^2n^2}{4mn(an^2 + m^2)}$  と求められる。従って、次の式が得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{(an^2 + m^2)^2 + 4am^2n^2}{4mn(an^2 + m^2)} - \frac{1}{4mn(an^2 + m^2)} \left( \frac{(an^2 - m^2)^4}{2[(an^2 + m^2)^2 + 4am^2n^2]} - \frac{(an^2 - m^2)^4}{2[(an^2 + m^2)^2 + 4am^2n^2]} - \dots \right)$$

### 2.5.4 5次収束の式

$x_n = m/n$  として、次式で  $x_{n+1}$  を求める。

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^4 + 10ax_n^2 + 5a^2)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2}$$

代入してまとめると、 $x_{n+1} = \frac{m[5(an^2 + m^2)^2 - 4m^4]}{n[5(an^2 + m^2)^2 - 4a^2n^4]}$  と求められる。従って、次の式が得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{m[5(an^2 + m^2)^2 - 4m^4]}{n[5(an^2 + m^2)^2 - 4a^2n^4]} + \frac{1}{n[5(an^2 + m^2)^2 - 4a^2n^4]} \left( \frac{(an^2 - m^2)^5}{2m[5(an^2 + m^2)^2 - 4m^4]} + \frac{(an^2 - m^2)^5}{2m[5(an^2 + m^2)^2 - 4m^4]} + \dots \right)$$

### 2.5.5 6次収束の式

$x_n = m/n$  として、次式で  $x_{n+1}$  を求める。

$$x_{n+1} = \frac{x_n^6 + 15ax_n^4 + 15a^2x_n^2 + a^3}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)}$$

代入してまとめると、 $x_{n+1} = \frac{(an^2 + m^2)[(an^2 + m^2)^2 + 12am^2n^2]}{2mn(an^2 + 3m^2)(3an^2 + m^2)}$  と求められる。従って、次の式が得られる。

$$\sqrt{a} = \frac{(an^2 + m^2)[(an^2 + m^2)^2 + 12am^2n^2]}{2mn(an^2 + 3m^2)(3an^2 + m^2)} - \frac{1}{2mn(an^2 + 3m^2)(3an^2 + m^2)} \left( \frac{(an^2 - m^2)^6}{2(an^2 + m^2)[(an^2 + m^2)^2 + 12am^2n^2]} - \dots \right)$$

### 2.5.6 計算例

$a = 5/4$ ,  $m = n = 2$  の時、上で求めた近似式による計算を実行してみる。

元の式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_4}{F_3} + \frac{1}{F_3} \left( \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_3} + \dots \right)$

2次収束式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_7}{F_6} - \frac{1}{F_6} \left( \frac{1}{L_6} - \frac{1}{L_6} - \frac{1}{L_6} - \dots \right)$

3次収束式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_{10}}{F_9} + \frac{1}{F_9} \left( \frac{1}{L_9} + \frac{1}{L_9} + \frac{1}{L_9} + \dots \right)$

4次収束式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_{13}}{F_{12}} - \frac{1}{F_{12}} \left( \frac{1}{L_{12}} - \frac{1}{L_{12}} - \frac{1}{L_{12}} - \dots \right)$

5次収束式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_{16}}{F_{15}} + \frac{1}{F_{15}} \left( \frac{1}{L_{15}} + \frac{1}{L_{15}} + \frac{1}{L_{15}} + \dots \right)$

6次収束式  $\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{F_{19}}{F_{18}} - \frac{1}{F_{18}} \left( \frac{1}{L_{18}} - \frac{1}{L_{18}} - \frac{1}{L_{18}} - \dots \right)$

得られた結果の分母は  $F_{3n}, L_{3n}$  になっており、 $n$  次収束式の場合、元の式を  $n$  回繰り返して適用した場合に等しくなっていることが分かる。

## 3 二項展開に関して

二項展開と連分数の関係について述べることにする。

### 3.1 はじめに。 $\sqrt{5}/2 = \sqrt{5/4}$ の別の表現

$\sqrt{5}/2 = \sqrt{5/4}$  は、先に示した正則連分数展開の主近似分数を用いて、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{81}\right)^{1/2} = \frac{9}{8} \left(1 + \frac{1}{80}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{19}{17} \left(1 + \frac{1}{1444}\right)^{1/2} = \frac{19}{17} \left(1 - \frac{1}{1445}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{161}{144} \left(1 - \frac{1}{25921}\right)^{1/2} = \frac{161}{144} \left(1 + \frac{1}{25920}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{341}{305} \left(1 + \frac{1}{465124}\right)^{1/2} = \frac{341}{305} \left(1 - \frac{1}{465125}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

### 3.2 二項展開

次いで（一般化）二項展開について復習する。具体的には次の通りである。後述する R 記法 (付録 B) を用いて、

$$\begin{aligned} (y+x)^r &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{r}{s} y^{r-s} x^s \\ &= y^r + \frac{r}{1!} y^{r-1} x + \frac{r(r-1)}{2!} y^{r-2} x^2 + \dots \\ &= y^r \left( 1 + \frac{rx}{y} \left( 1 + \frac{(r-1)x}{2y} \left( 1 + \frac{(r-2)x}{3y} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= y^r \mathop{\mathrm{R}}_{n=0}^{\infty} \frac{(r-n)x}{(n+1)y} \end{aligned}$$

と書き表せる\*1。特に  $y = 1$  のとき、

$$\begin{aligned} (1+x)^r &= 1 + \frac{rx}{1} \left( 1 + \frac{(r-1)x}{2} \left( 1 + \frac{(r-2)x}{3} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \\ &= \mathop{\mathrm{R}}_{n=0}^{\infty} \frac{(r-n)x}{n+1} \end{aligned}$$

\*1 降幕の Pochhammer の記号を  $(r)_s = \Gamma(r+1)/\Gamma(r-s+1)$  とする。この時、 $\binom{r}{s} = \frac{(r)_s}{s!}$  である。特殊関数論で用いられる昇幕の Pochhammer の記号  $(r)_s = \Gamma(r+s)/\Gamma(r)$  と紛らわしいので、注意を要する

となる。また、後述するように Gosper の方法を適用すると (B.3 参照)、

$$\begin{aligned}(y+x)^r &= \frac{y^{r+1}}{y+x} \left( 1 + \frac{(r+1)x}{1 \cdot (y+x)} \left( 1 + \frac{(r+2)x}{2 \cdot (y+x)} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \\ &= \frac{y^{r+1}}{y+x} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(r+k+1)x}{(k+1)(y+x)} \\ (1+x)^r &= \frac{1}{1+x} \left( 1 + \frac{(r+1)x}{1 \cdot (1+x)} \left( 1 + \frac{(r+2)x}{2 \cdot (1+x)} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{1+x} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(r+k+1)x}{(k+1)(1+x)}\end{aligned}$$

が得られる。

### 3.3 二項展開の別の表現

参考文献 [13] による次の展開も有用である。最初の展開は、

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{q_0} \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right)^{\frac{1}{k}} &= \frac{p_0}{q_0} \left( 1 \mp \frac{(0k-1)u}{kv} \left( 1 \mp \frac{(1k-1)u}{2kv} \left( 1 \mp \frac{(2k-1)u}{3kv} \left( 1 \mp \cdots \right) \right) \right) \right) \\ &\begin{cases} p_n = \mp [(n-1)k-1]u & n \geq 1 \\ q_n = nk v & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} \pm u q_0 & n = 1 \\ \mp (n-1)[(n-1)k-1] & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= nk v \mp [(n-1)k-1] \quad n \geq 1\end{aligned}$$

であり、次の展開は、

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{q_0} \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right)^{\frac{-1}{k}} &= \frac{p_0}{q_0} \left( 1 \mp \frac{(0k+1)u}{kv} \left( 1 \mp \frac{(1k+1)u}{2kv} \left( 1 \mp \frac{(2k+1)u}{3kv} \left( 1 \mp \cdots \right) \right) \right) \right) \\ &\begin{cases} p_n = \mp [(n-1)k+1]u & n \geq 1 \\ q_n = nk v & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} \mp u q_0 & n = 1 \\ \mp (n-1)[(n-1)k+1] & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= nk v \mp [(n-1)k+1] \quad n \geq 1\end{aligned}$$

である。

### 3.4 無限級数と連分数展開

無限級数は、次のように連分数に直せることを、L.Euler が導いた。黄金比の連分数表示を得るためには、まず無限級数を求め、次いで連分数に変換すればよい。

$$\begin{aligned}S &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + a_0 a_1 a_2 a_3 + \cdots \\ &= a_0 (1 + a_1 (1 + a_2 (1 + a_3 (1 + \cdots)))) \\ &= \frac{a_0}{1 - 1 + a_1 - 1 + a_2 - 1 + a_3 - \cdots}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^n \left( \frac{p_k}{q_k} \right) \\ &= \frac{p_0}{q_0} \left( 1 + \frac{p_1}{q_1} \left( 1 + \frac{p_2}{q_2} \left( 1 + \frac{p_3}{q_3} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{p_0}{q_0 - p_1 + q_1 - p_2 + q_2 - p_3 + q_3 - \cdots}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ &= \frac{a_0}{1} \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \left( 1 + \frac{a_3}{a_2} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{a_0}{1 - a_1 + a_0 - a_2 + a_1 - a_3 + a_2 - \cdots}\end{aligned}$$

最初の変換式を証明する。

*Proof.* 第 1 ステップ。\$S\_2\$ を示す。

$$\begin{aligned}S_2 &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 \\ &= \frac{a_0}{\frac{1}{a_1(1+a_2)+1}} \\ &= \frac{a_0}{\frac{a_1(1+a_2)+1-a_1(1+a_2)}{a_1(1+a_2)+1}} \\ &= \frac{a_0}{1 - a_1(1+a_2) + 1} \frac{a_1(1+a_2)}{a_1(1+a_2)+1} \\ &= \frac{a_0}{1 - \frac{a_1(1+a_2)+1}{1+a_2}} \frac{a_1}{a_1(1+a_2)+1} \\ &= \frac{a_0}{1 - \frac{(1+a_1)(1+a_2)-a_2}{1+a_2}} \frac{a_1}{a_1(1+a_2)+1} \\ &= \frac{a_0}{1 - 1 + a_1 - 1 + a_2} \frac{a_1}{1 + a_2}\end{aligned}$$

第 2 ステップ。第 1 ステップを用いて \$S\_{2'}\$ を示す。

$$\begin{aligned}S_{2'} &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 (a_2 + a_2 w) \\ &= \frac{a_0}{1 - 1 + a_1 - 1 + a_2(1+w)} \frac{a_1}{a_1} \frac{a_2(1+w)}{a_2(1+w)} \\ &= \frac{a_0}{1 - 1 + a_1 - (1+a_2)(1+w) - w} \frac{a_1}{a_1} \frac{a_2(1+w)}{a_2(1+w)} \\ &= \frac{a_0}{1 - 1 + a_1 - 1 + a_2 - 1 + w} \frac{a_1}{a_1} \frac{a_2}{a_2} \frac{w}{w}\end{aligned}$$

このステップを繰り返し適用することで、無限級数が連分数に変換される。□

黄金比に関する表現 \$\frac{p\_0}{q\_0} (1 \pm x)^{\pm 1/2}\$ を無限級数に直すには、先に挙げた二項展開を利用すればよい。次に、いくつか例示する。

3.4.1 例 1

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 4} \left(1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4} \left(1 - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 4} \left(1 - \dots\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{8 \cdot 1} \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 2} \left(1 - \frac{3}{8 \cdot 3} \left(1 - \dots\right)\right)\right) \\ p_n &= -2n + 1, \quad q_n = 8(n + 1) \\ p_n q_{n-1} &= 8n(1 - 2n) \\ p_n + q_n &= 3(2n + 3) \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{8}{15} - \frac{48}{21} - \dots - \frac{8n(1 - 2n)}{3(2n + 3)} - \dots \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} + \frac{8}{15} + \frac{48}{21} + \dots + \frac{8n(2n - 1)}{3(2n + 3)} + \dots \end{aligned}$$

3.4.2 例 2

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{10} \left(1 + \frac{6}{2 \cdot 10} \left(1 + \frac{11}{3 \cdot 10} \left(1 + \dots\right)\right)\right) \\ p_n &= 5n + 1, \quad q_n = 10(n + 1) \\ p_n q_{n-1} &= 10n(5n + 1) \\ p_n + q_n &= 15n + 11 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{10} - \frac{60}{26} - \frac{220}{41} - \dots - \frac{10n(2n + 1)}{15n + 11} - \dots \end{aligned}$$

3.4.3 例 3

次は、Gosper の方法の例である。\$p\_0 = 1, q\_0 = 1, x = 1/4, r = 1/2, \frac{x}{x+1} = 1/5\$ の時、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \\ &= \frac{4}{5} \left(1 + \frac{3}{1 \cdot 5} \left(1 + \frac{5}{2 \cdot 5} \left(1 + \dots\right)\right)\right) \\ &= \frac{4}{5} \left(1 + \frac{3}{1 \cdot 10} \left(1 + \frac{5}{2 \cdot 10} \left(1 + \dots\right)\right)\right) \\ \begin{cases} p_n = 2n + 1 & n \geq 1 \\ q_n = 10n & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} 15 & n = 1 \\ 10(n - 1)(2n + 1) & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= 12n + 1 \quad n \geq 1 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{15}{13} - \frac{50}{25} - \dots - \frac{10(n - 1)(2n + 1)}{12n + 1} - \dots \end{aligned}$$

3.4.4 例 4

次は、Gosper の方法の例である。\$p\_0 = 1, q\_0 = 1, x = -1/5, r = 1/2, \frac{x}{x+1} = 1/4\$ の時、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{1 \cdot 4} \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 4} \left(1 - \dots\right)\right)\right) \\ &= \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{1 \cdot 8} \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 8} \left(1 - \dots\right)\right)\right) \\ \begin{cases} p_n = -2n + 1 & n \geq 1 \\ q_n = 8n & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} -4 & n = 1 \\ -8(n - 1)(2n - 1) & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= 6n + 1 \quad n \geq 1 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{4}{7} + \frac{24}{13} + \dots + \frac{8(n - 1)(2n - 1)}{6n + 1} + \dots \end{aligned}$$

3.4.5 例 5

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left( \frac{81}{64} - \frac{1}{64} \right)^{1/2} \\ &= \frac{9}{8} \left( 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{64}\right)}{1 \cdot \frac{81}{64}} \left( 1 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{64}\right)}{2 \cdot \frac{81}{64}} \left( 1 + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-1}{64}\right)}{3 \cdot \frac{81}{64}} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{1}{1 \cdot 162} \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 162} \left( 1 + \frac{3}{3 \cdot 162} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \left[ \frac{-1}{162} \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 162} \left( 1 + \frac{3}{3 \cdot 162} \left( 1 + \frac{5}{4 \cdot 162} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \right] \\ p_n &= 2n - 1, \quad q_n = 162(n + 1) \\ p_n q_{n-1} &= 162n(2n - 1) \\ p_n + q_n &= 164n + 161 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{13}{8} - \frac{9}{8} \left( \frac{1}{162} - \frac{162}{325} - \frac{972}{489} - \frac{2430}{653} - \dots - \frac{162n(2n-1)}{164n+161} - \dots \right) \end{aligned}$$

3.4.6 例 6

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \left( \frac{64}{81} + \frac{4}{405} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{9}{8} \left( 1 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{4}{405}\right)}{1 \cdot \frac{64}{81}} \left( 1 + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{4}{405}\right)}{2 \cdot \frac{64}{81}} \left( 1 + \frac{\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{4}{405}\right)}{3 \cdot \frac{64}{81}} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{1}{1 \cdot 160} \left( 1 - \frac{3}{2 \cdot 160} \left( 1 - \frac{5}{3 \cdot 160} \left( 1 - \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \left[ \frac{-1}{1 \cdot 160} \left( 1 - \frac{3}{2 \cdot 160} \left( 1 - \frac{5}{3 \cdot 160} \left( 1 - \frac{7}{4 \cdot 160} \left( 1 - \dots \right) \right) \right) \right) \right] \\ p_n &= -2n - 1, \quad q_n = 160(n + 1) \\ p_n q_{n-1} &= -160n(2n + 1) \\ p_n + q_n &= 158n + 159 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{13}{8} - \frac{9}{8} \left( \frac{1}{160} + \frac{480}{317} + \frac{1600}{475} + \frac{3360}{633} + \dots + \frac{160n(2n+1)}{158n+159} + \dots \right) \end{aligned}$$

3.4.7 例 7

次は、Gosper の方法の例である。  $p_0 = 9, q_0 = 8, x = -1/81, r = 1/2, \frac{x}{x+1} = 1/80$  の時、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{1}{81} \right)^{1/2} \\ &= \frac{729}{640} \left( 1 - \frac{\frac{3}{2}}{1 \cdot 80} \left( 1 - \frac{\frac{5}{2}}{2 \cdot 80} \left( 1 - \dots \right) \right) \right) \\ &= \frac{729}{640} \left( 1 - \frac{3}{1 \cdot 160} \left( 1 - \frac{5}{2 \cdot 160} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \\ \begin{cases} p_n = -2n - 1 & n \geq 1 \\ q_n = 160n & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} -1920 & n = 1 \\ -160(n-1)(2n+1) & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= 158n - 1 \quad n \geq 1 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{729}{640} + \frac{1920}{157} + \frac{800}{315} + \dots + \frac{160(n-1)(2n+1)}{158n-1} + \dots \end{aligned}$$

3.4.8 例 8

次は、Gosper の方法の例である。  $p_0 = 9, q_0 = 8, x = 1/80, r = -1/2, \frac{x}{x+1} = 1/81$  の時、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \frac{9}{8} \left( 1 + \frac{1}{80} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{10}{9} \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 81} \left( 1 + \frac{\frac{3}{2}}{2 \cdot 81} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \\ &= \frac{10}{9} \left( 1 + \frac{1}{1 \cdot 162} \left( 1 + \frac{3}{2 \cdot 162} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \\ \begin{cases} p_n = 2n - 1 & n \geq 1 \\ q_n = 162n & n \geq 1 \end{cases} \\ p_n q_{n-1} &= \begin{cases} 9 & n = 1 \\ 162(n-1)(2n-1) & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n + q_n &= 164n - 1 \quad n \geq 1 \\ \phi &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{10}{9} - \frac{9}{163} - \frac{486}{327} - \dots - \frac{162(n-1)(2n-1)}{164n-1} - \dots \end{aligned}$$

### 3.5 超幾何級数

この節では、特に  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  に関する連分数を取り扱う。以下簡便のために  $F(a, b; c; x)$  と記すことにする。昇幕の Pochhammer の記号を  $(a)_n$  とすると、次のように定義される。

$$\begin{aligned} F(a, b; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \\ &= 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1 \cdot 2} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{abx}{1 \cdot c} \left( 1 + \frac{(a+1)(b+1)x}{2(c+1)} \left( 1 + \frac{(a+2)(b+2)x}{3(c+2)} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \end{aligned}$$

超幾何級数を用いて、種々の関数が記述できることが知られている。例えば二項展開は、

$$(1-x)^{-a} = F(a, 1; 1; x)$$

と書ける。

#### 3.5.1 Gauss の隣接関係式

Gauss の隣接関係式を次に示す。

$$F(a, b; c; x) = F(a, b+1; c+1; x) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} F(a+1, b+1; c+2; x)$$

$$F(a, b+1; c+1; x) = F(a+1, b+1; c+2; x) - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} F(a+1, b+2; c+3; x)$$

これらの式を交互に使うと、次の連分数展開が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{F(a, b; c; x)}{F(a, b+1; c+1; x)} &= 1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x \frac{1}{\frac{F(a, b+1; c+1; x)}{F(a+1, b+1; c+2; x)}} \\ &= 1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x \frac{1}{1 - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} x \frac{1}{\frac{F(a+1, b+1; c+2; x)}{F(a+1, b+2; c+3; x)}}} \\ &= 1 - \frac{\frac{a(c-b)x}{c(c+1)}}{1} - \frac{\frac{(b+1)(c-a+1)x}{(c+1)(c+2)}}{1} - \frac{\frac{(a+1)(c-b+1)x}{(c+2)(c+3)}}{1} - \frac{\frac{(b+2)(c-a+2)x}{(c+3)(c+4)}}{1} - \dots \\ &\quad \begin{cases} a_{2n-1} = -\frac{(a+n-1)(c-b+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)} & n \geq 1 \\ a_{2n} = -\frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)} & n \geq 1 \end{cases} \\ \therefore \frac{cF(a, b; c; x)}{F(a, b+1; c+1; x)} &= c - \frac{a(c-b)x}{c+1} - \frac{(b+1)(c-a+1)x}{c+2} - \frac{(a+1)(c-b+1)x}{c+3} - \frac{(b+2)(c-a+2)x}{c+4} - \dots \\ \therefore \frac{F(a, b+1; c+1; x)}{F(a, b; c; x)} &= \frac{c}{c} - \frac{a(c-b)x}{c+1} - \frac{(b+1)(c-a+1)x}{c+2} - \frac{(a+1)(c-b+1)x}{c+3} - \frac{(b+2)(c-a+2)x}{c+4} - \dots \end{aligned}$$

特に  $b=0$  の時、 $F(a, 0; c; x) = 1$  となるので、

$$\begin{aligned} F(a, 1; c+1; x) &= \frac{c}{c-c+1} - \frac{acx}{c+1} - \frac{1 \cdot (c-a+1)x}{c+2} - \frac{(a+1)(c+1)x}{c+3} - \frac{2 \cdot (c-a+2)x}{c+4} - \dots \\ &= \frac{1}{1-c+1} - \frac{ax}{c+1} - \frac{1 \cdot (c-a+1)x}{c+2} - \frac{(a+1)(c+1)x}{c+3} - \frac{2 \cdot (c-a+2)x}{c+4} - \dots \end{aligned}$$

ここで、 $c+1$  を  $c$  と置き直すと、

$$\begin{aligned} F(a, 1; c; x) &= \frac{1}{1-c} - \frac{ax}{c} - \frac{1 \cdot (c-a)x}{c+1} - \frac{(a+1)cx}{c+2} - \frac{2 \cdot (c-a+1)x}{c+3} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{(a+n)(c+n-1)x}{c+2n} - \frac{(n+1)(c-a+n)x}{c+2n+1} - \dots \\ &= 1 + \frac{ax}{c-ax} - \frac{1 \cdot (c-a)x}{c+1} - \frac{(a+1)cx}{c+2} - \frac{2 \cdot (c-a+1)x}{c+3} - \dots \end{aligned}$$

が得られる。最後の式は、直前の式の最初の  $\frac{1}{1}$  のところで縮約をかけると得られる。

#### 3.5.2 例 1

黄金比は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} + \left( 1 - \frac{1}{5} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} + F\left( \frac{1}{2}, 1; 1; \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1/10}{1} - \frac{1/10}{2} - \frac{3/10}{3} - \frac{2 \cdot 3/10}{4} - \frac{2 \cdot 5/10}{5} - \frac{3 \cdot 5/10}{6} - \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{10} - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{30} - \frac{2 \cdot 3}{4} - \frac{2 \cdot 5}{50} - \frac{3 \cdot 5}{6} - \frac{3 \cdot 7}{70} - \dots - \frac{n(2n-1)}{2n} - \frac{n(2n+1)}{10(2n+1)} - \dots \end{aligned}$$

#### 3.5.3 その他の隣接関係式 1

参考文献 [18] には、次の隣接関係式が記載されている。

$$F(a, b; c; x) = F(a, b+1; c; x) - \frac{ax}{c} F(a+1, b+1; c+1; x)$$

$$F(a, b+1; c; x) = \frac{c+(a-b)x}{c} F(a+1, b+1; c+1; x) - \frac{(a+1)(c-b)x}{c(c+1)} F(a+2, b+1; c+2; x)$$

これらの式を交互に使うと、次の連分数展開が得られる。

$$\frac{F(a, b+1; c; x)}{F(a, b; c; x)} = \frac{1}{1-c+(a-b)x} - \frac{ax}{c+1+(a-b)x} - \frac{(a+1)(c-b)x}{c+2+(a-b)x} - \dots$$

特に  $b=0, c=1$  の時、

$$F(a, 1; 1; x) = \frac{1}{1-1+ax} - \frac{ax}{2+(a+1)x} - \frac{2(a+2)x}{3+(a+2)x} - \frac{3(a+3)x}{4+(a+3)x} - \dots$$

となる。

### 3.5.4 例 2

この隣接関係式を利用すると、黄金比は次のように表される。

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} + F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1-1} \frac{1/10}{-2+3/10} - \frac{1 \cdot 3/10}{3+5/10} + \frac{2 \cdot 5/10}{-4+7/10} - \frac{3 \cdot 7/10}{5+9/10} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1-11} - \frac{1}{20+3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 10}{30+5} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 10}{40+7} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 10}{50+9} - \dots - \frac{10(n-1)(2n-1)}{12n-1} - \dots \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{10-23} - \frac{30}{35} + \frac{100}{47} - \frac{210}{59} + \frac{360}{67} - \dots - \frac{10(n-1)(2n-1)}{12n-1} - \dots\end{aligned}$$

最後の式は、直前の式の  $\frac{1}{1}$  のところで縮約をかけた。また、この式は

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{abx}{1 \cdot c} \left(1 + \frac{(a+1)(b+1)x}{2(c+1)} \left(1 + \frac{(a+2)(b+2)x}{3(c+2)} \left(1 + \dots\right)\right)\right)$$

を、次の変換式で連分数に展開した式に等しい。

$$\begin{aligned}S &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^n \left(\frac{p_k}{q_k}\right) \\ &= 1 + \frac{p_0}{q_0} \left(1 + \frac{p_1}{q_1} \left(1 + \frac{p_2}{q_2} \left(1 + \frac{p_3}{q_3} \left(1 + \dots\right)\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1 q_0}{p_1 + q_1} + \frac{p_2 q_1}{p_2 + q_2} - \frac{p_3 q_2}{p_3 + q_3} - \dots\end{aligned}$$

特に、 $p_k = (a+k)(b+k)x$ ,  $q_k = (k+1)(c+k)$  で  $a = 1/2, b = c = 1, x = 1/5$  であることに注意する。

### 3.5.5 その他の隣接関係式 2

参考文献 [18] には、次の隣接関係式も記載されている。

$$\begin{aligned}F(a, b; c; x) &= F(a, b+1; c; x) - \frac{ax}{c} F(a+1, b+1; c+1; x) \\ F(a, b; c; x) &= \frac{c-b}{c} F(a+1, b; c+1; x) - \frac{b(1-x)}{c} F(a+1, b+1; c+1; x)\end{aligned}$$

これらの式を交互に使うと、次の連分数展開が得られる。

$$\frac{F(a, b+1; c; x)}{F(a, b; c; x)} = \frac{1}{1-c-b-1} + \frac{ax}{1} \frac{(b+1)(1-x)}{-c-b-1} - \frac{(a+1)x}{1} \frac{(b+2)(1-x)}{1} - \dots$$

特に  $b = 0, c = 1$  の時、

$$F(a, 1; 1; x) = \frac{1}{1-0} + \frac{ax}{1} \frac{1(1-x)}{-0} - \frac{(a+1)x}{0} + \frac{2(1-x)}{1} - \dots - \frac{(a+n-1)x}{0} + \frac{n(1-x)}{1} - \dots$$

となる。

### 3.5.6 例 3

この隣接関係式を利用すると、黄金比は次のように表される。

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} + F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1-0} \frac{1/10}{-0+1 \cdot 4/5} + \frac{3/10}{1-0} + \frac{2 \cdot 4/5}{1-0} + \frac{5/10}{1-0} + \frac{3 \cdot 4/5}{1-0} - \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1-0} \frac{1}{1-0} + \frac{8}{1-0} + \frac{3}{1-0} + \frac{16}{1-0} + \frac{5}{1-0} + \frac{24}{1-0} - \dots - \frac{2n-1}{0} + \frac{8n}{1-0} - \dots\end{aligned}$$

得られた連分数展開に対し 1 回 odd part(奇数部分)をとると、次のようになる。

$$\phi = \frac{3}{2} + \frac{1}{7+13+19} + \frac{24}{25+31+37} + \frac{80}{43+49+55} + \frac{168}{61+67+73} + \frac{288}{79+85+91} + \frac{440}{97+103+109} + \frac{624}{115+121+127} + \frac{4n(4n+2)}{6n+7} + \dots$$

これら 2 つの展開を途中で打ち切り、比較してみる。最初の展開では、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{1-0} \frac{1}{1-0} + \frac{8}{1-0} &= \frac{23}{14} = 1.642857\dots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{1-0} \frac{1}{1-0} + \frac{8}{1-0} + \frac{3}{1-0} + \frac{16}{1-0} &= \frac{371}{230} = 1.613043\dots\end{aligned}$$

となるが、次の展開では、

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} + \frac{1}{7} &= \frac{23}{14} = 1.642857\dots \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{7+13} &= \frac{371}{230} = 1.613043\dots\end{aligned}$$

となり、縮約が掛かっていることが確認できる。

## 4 二次無理数の漸化式

### 4.1 二つの漸化式

二次の無理数は、漸化式を利用して計算することができる。1 つ目の漸化式は連分数に基づいている。二次の無理数の無限連分数展開

$$\begin{aligned}\frac{C + \sqrt{D}}{E} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2} + \frac{a_2}{\dots + b_n} + \dots \\ &= b_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\end{aligned}$$

に対し(正則連分数展開でない場合、循環するとは限らないことに注意する)、まず  $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = b_0, Q_0 = 1$  とおいて、 $n \geq 1$  で、

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{cases} \quad (1)$$

としたとき、

$$\frac{C + \sqrt{D}}{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

にて求められる。プログラミング等で、添え字を 0 以上にしたい場合は、 $P_0 = b_0$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $P_1 = a_1 + b_0 b_1$ ,  $Q_1 = b_1$  として、 $n \geq 2$  で計算すればよい。

一方、2 つ目の漸化式は、まず  $P_0 = Q_0 = 1$  とおいて、 $n \geq 1$  で、

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\begin{cases} P_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1} \\ Q_n = \gamma_n P_{n-1} + \delta_n Q_{n-1} \end{cases} \quad (3)$$

としたとき、

$$\frac{C + \sqrt{D}}{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

にて求められる。これら 2 つの漸化式には、付録 D で示した関係があり、2 つ目の漸化式 (3)(4) をもとに、連分数 (1 つ目の漸化式 (1)(2)) を導くことができる。

二つ目の漸化式において、二次の無理数を求める場合、 $\frac{\gamma_m}{\delta_m} = k$ ,  $\frac{\alpha_m - \delta_m}{\beta_m} = j$ , ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) とおくと、係数行列  $A$  は、次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ k\beta_n & \alpha_n - j\beta_n \end{pmatrix}$$

このとき、

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}}{k\beta_n P_{n-1} + (\alpha_n - j\beta_n) Q_{n-1}} = \frac{\alpha_n (P_{n-1}/Q_{n-1}) + \beta_n}{k\beta_n (P_{n-1}/Q_{n-1}) + (\alpha_n - j\beta_n)}$$

となり、数列  $\{P_n/Q_n\}$  の特性方程式は、次のようになる。

$$x = \frac{\alpha_n x + \beta_n}{k\beta_n x + (\alpha_n - j\beta_n)}$$

分母を払って

$$\therefore kx^2 - jx - 1 = 0$$

となる。特に、 $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  には依存しないことに注意する。従って、 $j = k = 1$  の時、黄金比  $\phi$  が求められる。ちなみに、 $k = 1/2$ ,  $j = 0$  であれば、 $\sqrt{2}$  が求められる。

## 4.2 黄金比 $\phi$ の漸化式表示

$\phi$  の場合も漸化式表示が可能である。1 つ目の漸化式は  $\phi$  の正則連分数展開で、(1)(2) の表記法では、

$$\begin{aligned} \phi &= 1 + \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1} \right) \\ P_{-1} &= 1, Q_{-1} = 0, P_0 = 1, Q_0 = 1 \\ \begin{cases} P_n = P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \\ \phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} \end{aligned}$$

となる。

一方、2 つ目の漸化式は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\because F_1 = 1, F_0 = 0) \end{aligned}$$

となることから、(3)(4) の表記では、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix} \\ P_0 &= 1, Q_0 = 1 \\ \begin{cases} P_n = P_{n-1} + Q_{n-1} \\ Q_n = P_{n-1} \end{cases} \\ \phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} \end{aligned}$$

となる。

## 4.3 黄金比の無限連分数展開

黄金比は、付録 D の方法 (13) で  $j = 1$ ,  $k = 1$  の場合に相当し、2 つ目の漸化式の係数行列は、 $A = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n - \beta_n \end{pmatrix}$  となる。次に示す漸化式の  $P_n$ ,  $Q_n$  を用いて、 $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$  により黄金比



$\phi$  の値が計算できる。

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha_0 + \frac{\alpha_0\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1 - \beta_1)}{\alpha_0\beta_1 + \alpha_1 - \beta_1} + \frac{\infty}{\mathbb{K}} \left( \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}))}{\alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})} \right) \\ &= t_0 + \frac{\infty}{\mathbb{K}} \left( \frac{s_n}{t_n} \right) \\ &\quad \begin{cases} P_n = t_n P_{n-1} + s_n P_{n-2} \\ Q_n = t_n Q_{n-1} + s_n Q_{n-2} \end{cases} \quad (P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = t_0, Q_0 = 1)\end{aligned}$$

#### 4.3.1 例 1

2 つ目の漸化式の行列  $A$  が、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 1, \beta_n = 1, \gamma_n = 1, \delta_n = 0$  であり、連分数は次のようになる。よく知られた、最も有名な無限連分数展開である。

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha_0 + \frac{\alpha_0\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1 - \beta_1)}{\alpha_0\beta_1 + \alpha_1 - \beta_1} + \frac{\infty}{\mathbb{K}} \left( \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}))}{\alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})} \right) \\ &= 1 + \frac{1+1-(1+1-1)}{1+1-1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} + \dots\end{aligned}$$

となる。表計算ソフトを利用して、 $P_n, Q_n, P_n/Q_n$  を計算すると、次のようになる。

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		1	1	1	1.000000000000000
1	1	1	2	1	2.000000000000000
2	1	1	3	2	1.500000000000000
3	1	1	5	3	1.666666666666667

$P_n, Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{n+2}^{[0]}, Q_n = F_{n+1}^{[0]}$$

#### 4.3.2 例 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 2, \beta_n = 1, \gamma_n = 1, \delta_n = 1$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		2	2	1	2.000000000000000
1	-1	3	5	3	1.666666666666667
2	-1	3	13	8	1.625000000000000
3	-1	3	34	21	1.61904761904762

$P_n, Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{2n+2}^{[1]}, Q_n = F_{2n+1}^{[1]}$$

#### 4.3.3 例 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 3, \beta_n = 2, \gamma_n = 2, \delta_n = 1$  であり、連分数は次のようになる。下表で  $P_n, Q_n$  は Lucas 数になっている。

$$\phi = 3 - \frac{10}{7} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} + \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		3	3	1	3.000000000000000
1	-10	7	11	7	1.57142857142857
2	1	4	47	29	1.62068965517241
3	1	4	199	123	1.61788617886179

$P_n, Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{3n+2}^{[2]}, Q_n = F_{3n+1}^{[2]}$$

#### 4.3.4 例 4

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 5, \beta_n = 3, \gamma_n = 3, \delta_n = 2$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 5 - \frac{57}{17} \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7} - \dots$$

$P_n, Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{4n+2}^{[4]}, Q_n = F_{4n+1}^{[4]}$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		5	5	1	5.000000000000000
1	-57	17	28	17	1.64705882352941
2	-1	7	191	118	1.61864406779661
3	-1	7	1309	809	1.61804697156984

#### 4.3.5 例5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 8$ ,  $\beta_n = 5$ ,  $\gamma_n = 5$ ,  $\delta_n = 3$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 8 - \frac{275}{43} - \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \frac{1}{11} + \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		8	8	1	8.000000000000000
1	-275	43	69	43	1.60465116279070
2	1	11	767	474	1.61814345991561
3	1	11	8506	5257	1.61803309872551

$P_n$ ,  $Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{5n+2}^{[7]}, Q_n = F_{5n+1}^{[7]}$$

一般に、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix}$  のとき、 $P_n$ ,  $Q_n$  は、次のようになることが確認できる。

$$P_n = F_{mn+2}^{[F_{m+1}^{[0]}-1]}, Q_n = F_{mn+1}^{[F_{m+1}^{[0]}-1]}$$

また、 $j \geq 2$  において、連分数の部分分子  $a_j$  はカッシーニ・シムソンの定理より  $\pm 1$  に、また部分分母  $b_j$  は Lucas 数  $L_m$  に等しくなる。

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\beta}{\beta} (\beta^2 - \alpha^2 + \alpha\beta) = F_m^2 - F_{m+1}^2 + F_m F_{m+1} = F_m (F_m + F_{m+1}) - F_{m+1}^2 \\ &= F_m F_{m+2} - F_{m+1}^2 = (-1)^{m+1} \\ b_j &= \alpha + \frac{\beta}{\beta} (\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta = 2F_{m+1} - F_m = L_m \end{aligned}$$

従って、 $n$  が奇数の時 +、 $n$  が偶数の時 - として、次式が成り立つ。

$$\phi = F_{n+1} - \frac{F_n (F_{n+1}^2 - F_{n+1} - 1)}{(F_{n+1} - 1)(F_n + 1) + 1} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \frac{1}{L_n} \pm \dots$$

#### 4.3.6 例6

$A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  ( $i$  は自然数) のとき、 $\alpha_n = i$ ,  $\beta_n = i$ ,  $\gamma_n = i$ ,  $\delta_n = 0$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = i + \frac{1+i-i^2}{i} + \frac{\infty}{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1}\right)}$$

ここで、 $i = 4$  の場合について例示する。 $\alpha_n = 4$ ,  $\beta_n = 4$ ,  $\gamma_n = 4$ ,  $\delta_n = 0$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 4 - \frac{11}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		4	4	1	4.000000000000000
1	-11	4	5	4	1.250000000000000
2	1	1	9	5	1.800000000000000
3	1	1	14	9	1.555555555555556

$P_n$ ,  $Q_n$  は、付録 C に記した表記法を用いて、次のように表示できることが確認できる。

$$P_n = F_{n+2}^{[i-1]}, Q_n = F_{n+1}^{[i-1]}$$

#### 4.3.7 例7

$A = \begin{pmatrix} i & j \\ j & i-j \end{pmatrix}$  ( $i, j$  は自然数で  $2i > j$ ) のとき、 $\alpha_n = i$ ,  $\beta_n = j$ ,  $\gamma_n = j$ ,  $\delta_n = i-j$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = i + \frac{(1+i-i^2)j}{(j+1)i-j} + \frac{\infty}{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{j^2 + ij - i^2}{2i-j}\right)}$$

特に数値実験より、次の式が予想される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = j\phi + (i-j)$$

ここで、 $i = 4$ ,  $j = 3$  の場合について例示する。 $\alpha_n = 4$ ,  $\beta_n = 3$ ,  $\gamma_n = 3$ ,  $\delta_n = 1$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 4 - \frac{33}{13} - \frac{5}{5} - \frac{5}{5} - \frac{5}{5} + \dots$$

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 3\phi + 1 \approx 5.854101966$  である。

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$	$P_{n+1}/P_n$	$Q_{n+1}/Q_n$
-1			1	0			
0		4	4	1	4.000000000000000	4.750000000000000	13.000000000000000
1	-33	13	19	13	1.46153846153846	6.05263157894737	5.38461538461539
2	5	5	115	70	1.64285714285714	5.82608695652174	5.92857142857143
3	5	5	670	415	1.61445783132530	5.85820895522388	5.84337349397590

#### 4.3.8 例 8

これまでの例は、行列  $A$  の要素  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  が定数だったが、変数  $n$  を含んでいてもよい。次の例は、 $A = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = n+1, \beta_n = n, \gamma_n = n, \delta_n = 1$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{11} + \dots + \frac{n(n-2)(n^2-3n+1)}{n^2+n-1} + \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		1	1	1	1.000000000000000
1	1	2	3	2	1.500000000000000
2	-2	5	13	8	1.625000000000000
3	3	11	152	94	1.61702127659574

#### 4.3.9 例 9

$A = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = n, \beta_n = 1, \gamma_n = 1, \delta_n = n-1$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = \frac{1}{0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{6} - \frac{11}{8} - \dots - \frac{n^2-3n+1}{2n-2} - \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		0	0	1	0.000000000000000
1	1	0	1	0	$\infty$
2	1	2	2	1	2.000000000000000
3	-1	4	7	4	1.750000000000000

#### 4.3.10 例 10

$A = \begin{pmatrix} 2n+1 & n \\ n & n+1 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = 2n+1, \beta_n = n, \gamma_n = n, \delta_n = n+1$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = 1 + \frac{1}{3} - \frac{10}{9} - \frac{33}{23} - \dots - \frac{n(n-2)(n^2+n-1)}{3n^2-n-1} - \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		1	1	1	1.000000000000000
1	1	3	4	3	1.333333333333333
2	-10	9	26	17	1.52941176470588
3	-33	23	466	292	1.59589041095890

#### 4.3.11 例 11

$A = \begin{pmatrix} n & n \\ n & 0 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = n, \beta_n = n, \gamma_n = n, \delta_n = 0$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = \frac{1}{0} + \frac{2}{2} + \frac{6}{3} + \frac{12}{4} + \dots + \frac{n(n-1)}{n} + \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		0	0	1	0.000000000000000
1	1	0	1	0	$\infty$
2	2	2	2	2	1.000000000000000
3	6	3	12	6	2.000000000000000

#### 4.3.12 例 12

$A = \begin{pmatrix} n & n/2 \\ n/2 & n/2 \end{pmatrix}$  のとき、 $\alpha_n = n, \beta_n = n/2, \gamma_n = n/2, \delta_n = n/2$  であり、連分数は次のようになる。

$$\phi = \frac{1}{1} - \frac{2}{6} - \frac{6}{9} - \frac{12}{12} - \dots - \frac{n(n-1)}{3n} - \dots$$

$n$	$a_n$	$b_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n/Q_n$
-1			1	0	
0		0	0	1	0.000000000000000
1	1	1	1	1	1.000000000000000
2	-2	6	6	4	1.500000000000000
3	-6	9	48	30	1.600000000000000

## 5 最後に

黄金比  $\phi$  の連分数表示に関して、いくつかの例と作成法を提示した。よく知られた連分数展開の他にも、いろいろな表示法があることが分かった。また、この報告書で求めた結果のうちのいくつかは数値実験より予想されており、証明されているわけではない。今後の課題である。

## 付録 A 高次収束する繰り返し法

### A.1 はじめに

方程式の数値解  $f(x) = 0$  を求める方法のひとつとして、Newton 法がよく知られている [20, 21, 22, 23]。この方法では、 $x_n$  から  $x_{n+1}$  を求めるために、漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を用いる。求めたい解が重解でない場合収束は速く、2 次収束することが知られている。特に正の数  $a$  の平方根  $\sqrt{a}$  を求めたい場合、 $f(x) = x^2 - a$  より、

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

とする。

### A.2 高次収束する方法。Secant(割線) 法に関連して

Newton 法の収束を速める方法は、いろいろ知られているが [21, 22, 23, 26, 27, 28, 29]、ここでは簡便に計算できる高次収束法を紹介する。発想の原点は、Secant 法として知られている方法である。この方法は、Newton 法における  $f'(x_n)$  を、 $x_n$  とは別の点  $y_n$  を用いて、

$$f'(x_n) \approx \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

と近似した方法であり、収束の次数は 1.618 次 (黄金比!) とされている [20]。このとき、繰り返しの式は、

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}} \quad (5)$$

$$= \frac{x_n f(y_n) - y_n f(x_n)}{f(y_n) - f(x_n)} \quad (6)$$

となる。ここで、 $f(x) = x^2 - a$  のとき、式 (5) より、

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{\frac{(y_n^2 - a) - (x_n^2 - a)}{y_n - x_n}} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{\frac{y_n^2 - x_n^2}{y_n - x_n}} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{y_n + x_n} \end{aligned}$$

となる、また式 (6) より、

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n(y_n^2 - a) - y_n(x_n^2 - a)}{(y_n^2 - a) - (x_n^2 - a)} \\ &= \frac{x_n y_n + a}{y_n + x_n} \end{aligned}$$

となる。

### A.3 $g_1(x) = x$ の時

式 (5) に基づくと、次の漸化式が得られる。まず、 $g_1(x) = x$  として、

$$g_{m+1}(x) = x - \frac{x^2 - a}{x + g_m(x)} \quad (m \geq 1)$$

によって  $g_m(x)$  を定めると、

$$x_{n+1} = g_m(x_n)$$

が  $m$  次収束することが分かる。次に例示するように Gerlach により初めて導かれた漸化式 [26] が、Gerlach や他の方法 [27, 28, 29] と比べてずっと簡単に求められる。次に図解するように、 $m = 2$  の場合が Newton 法に等しく、 $m \geq 3$  で Secant 法になっていることが理解できる。

#### A.3.1 $m = 2$ のとき

Newton 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_2(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - a}{x_n + x_n} \\ &= \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \end{aligned}$$

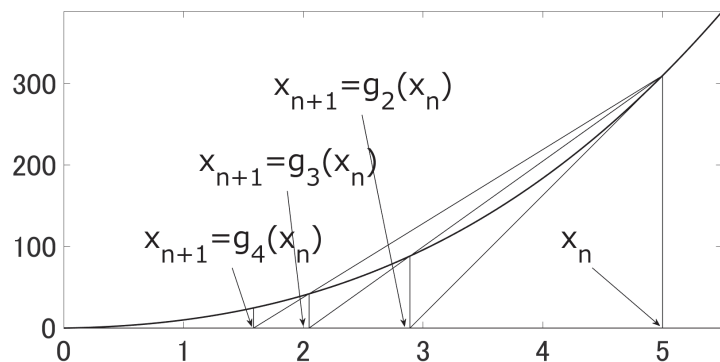


図1  $x_{n+1} = g_m(x_n)$  の図解

### A.3.2 $m = 3$ のとき

Halley 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_3(x_n) = x_n - \frac{2x_n(x_n^2 - a)}{3x_n^2 + a} \\ &= \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \end{aligned}$$

### A.3.3 $m = 4$ のとき

super Halley 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_4(x_n) = x_n - \frac{(3x_n^2 + a)(x_n^2 - a)}{4x_n(x_n^2 + a)} \\ &= \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n(x_n^2 + a)} \end{aligned}$$

### A.3.4 $m = 5$ のとき

次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_5(x_n) = x_n - \frac{4x_n(x_n^2 + a)(x_n^2 - a)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2} \\ &= \frac{x_n(x_n^4 + 10ax_n^2 + 5a^2)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2} \end{aligned}$$

### A.3.5 $m = 6$ のとき

次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_6(x_n) = x_n - \frac{(5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2)(x_n^2 - a)}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)} \\ &= \frac{x_n^6 + 15ax_n^4 + 15a^2x_n^2 + a^3}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)} \end{aligned}$$

## A.4 連分数に基づく方法

同じ漸化式は、平方根の連分数展開をもとにしても求められる(証明はできていない)。ここで取り上げる連分数展開は、本編でも取り上げた、

$$\sqrt{a} = x + \frac{a - x^2}{2x} + \frac{a - x^2}{2x} + \frac{a - x^2}{2x} + \frac{a - x^2}{2x} + \dots$$

である。この展開式より、形式的に

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \dots$$

とし、途中で打ち切る。次に例を示す。

### A.4.1 $m = 2$ のとき

Newton 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \end{aligned}$$

### A.4.2 $m = 3$ のとき

Halley 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \end{aligned}$$

### A.4.3 $m = 4$ のとき

super Halley 法に等しくなる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n(x_n^2 + a)} \end{aligned}$$

#### A.4.4 $m = 5$ のとき

次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n(x_n^4 + 10ax_n^2 + 5a^2)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2} \end{aligned}$$

#### A.4.5 $m = 6$ のとき

次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^6 + 15ax_n^4 + 15a^2x_n^2 + a^3}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)} \end{aligned}$$

## 付録 B Gosper の R 表記法と無限級数の変換

最初に、参考文献 [12] で用いられている無限級数の R 表記法について、例をもって示す。

$$\begin{aligned} \mathbb{R} r_k &= 1 + r_0(1 + r_1(1 + r_2(1 + \cdots))) \\ c \mathbb{R} r_k &= c + r_0(c + r_1(c + r_2(c + \cdots))) \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &= c(1 + r_0(1 + r_1(1 + r_2(1 + \cdots)))) \\ b_k \mathbb{R} r_k &= b_0 + r_0(b_1 + r_1(b_2 + r_2(b_3 + \cdots))) \end{aligned}$$

特に、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ &= a_0 \left( 1 + \frac{a_1}{a_0} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \\ &= a_0 \mathbb{R} \frac{a_{k+1}}{a_k} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、次の変換も可能である。

$$\begin{aligned} a_k \mathbb{R} c_k &= a_0 + c_0(a_1 + c_1(a_2 + c_2(a_3 + \cdots))) \\ &= a_0 \left( 1 + \frac{a_1 c_0}{a_0} \left( 1 + \frac{a_2 c_1}{a_1} \left( 1 + \cdots \right) \right) \right) \\ &= a_0 \mathbb{R} \frac{a_{k+1} c_k}{a_k} \\ \frac{a_k}{b_k} \mathbb{R} c_k &= \frac{a_0}{b_0} + c_0 \left( \frac{a_1}{b_1} + c_1 \left( \frac{a_2}{b_2} + c_2 \left( \frac{a_3}{b_3} + \cdots \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{b_0} \left( a_0 + \frac{b_0 c_0}{b_1} \left( a_1 + \frac{b_1 c_1}{b_2} \left( a_2 + \cdots \right) \right) \right) \\ &= \frac{a_k}{b_0} \mathbb{R} \frac{b_k c_k}{b_{k+1}} \end{aligned}$$

### B.1 変換の導出

無限級数の和  $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  において、各項  $a_n$  を 2 つに分割し、各項の後半と次の項の前半を足し合わせることにする。分割をうまく選ぶと、収束を速めることができる。元の級数の第  $n$  項  $a_n$  より  $a_{0,n} = a_n$  とし、項の比  $r_{k,n}$  を、

$$r_{k,n} = \frac{a_{k,n+1}}{a_{k,n}}$$

とする。各項の分割関数が  $s_{k,n}$  のとき、級数の第  $m$  項から変換をかけてみる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} a_{k,n} &= \sum_{n=m}^{\infty} a_{k,n} (s_{k,n} + 1 - s_{k,n}) \\ &= s_{k,m} a_{k,m} + \sum_{n=m}^{\infty} [(1 - s_{k,n}) a_{k,n} + s_{k,n+1} a_{k,n+1}] \\ &= s_{k,m} a_{k,m} + \sum_{n=m}^{\infty} (1 - s_{k,n} + s_{k,n+1} r_{k,n}) a_{k,n} \quad \left( \because r_{k,n} = \frac{a_{k,n+1}}{a_{k,n}} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで  $u_{k,n} = 1 - s_{k,n} + r_{k,n} s_{k,n+1}$  と定義すると、

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{k,n} = s_{k,m} a_{k,m} + \sum_{n=m}^{\infty} u_{k,n} a_{k,n}$$

が得られる。さらに  $a_{k+1,n} = u_{k,n} a_{k,n}$  とおくと、

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{k+1,n} = s_{k,m} a_{k,m} + \sum_{n=m}^{\infty} a_{k+1,n}$$

$k$  が  $j$  から始まるとして、この手続きを繰り返すと、

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} a_{j,n} &= s_{j,m} a_{j,m} + s_{j+1,m} a_{j+1,m} + \cdots \\ &= s_{j,m} a_{j,m} + s_{j+1,m} u_{j,m} a_{j,m} + s_{j+2,m} u_{j+1,m} u_{j,m} a_{j,m} + \cdots \end{aligned}$$

が得られる。よって、R 表記法を用いて、

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{j,n} = a_{j,m} \mathop{\text{R}}_{n=m} r_{j,n} = a_{j,m} s_{k,m} \mathop{\text{R}}_{k=j} u_{k,m}$$

と表すことができた。簡便のために、 $a_{j,m} = 1$  とすると、収束加速の式

$$\mathop{\text{R}}_{n=m} r_{j,n} = s_{k,m} \mathop{\text{R}}_{k=j} u_{k,m}$$

が得られる。

## B.2 加速のレシピ

級数の収束を加速させるためには、分割  $s_{k,m}$  と  $u_{k,m}$  を求めなければならない。この項では、「加速のレシピ」と称して、変換の方法をまとめてみる。簡便のため、初項から加速することにする。

1. 無限級数  $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  より、 $a_{0,n} = a_n$  とし、項の比  $r_{0,n} = \frac{a_{0,n+1}}{a_{0,n}}$  を求める。
2. 分割関数  $s_{0,n}$  を推定する。 $s_{0,n}$  にはパラメーターを含めて書くこともできる。
3.  $u_{0,n} = 1 - s_{0,n} + s_{0,n+1}r_{0,n}$  を計算する。 $u_{0,n}$  が簡単になるように、 $s_{0,n}$  のパラメーターを決める。
4.  $r_{1,n} = \frac{u_{0,n+1}}{u_{0,n}}r_{0,n}$  を計算する。
5. 得られた  $r_{1,n}$  が  $r_{0,n}$  と矛盾しないように、一般項  $r_{k,n}$  を推定する。
6.  $r_{k,n}$  と矛盾しないように、 $s_{k,n}, u_{k,n}$  を決める。
7. 加速は初項  $n = 0$  からなので、 $S = s_{k,0} \mathop{\text{R}}_{k=0} u_{k,0}$  とする。

## B.3 加速例。二項展開

二項展開の式を加速してみる。

$$\begin{aligned} (y+x)^r &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{r}{s} y^{r-s} x^s \\ &= y^r + \frac{r}{1!} y^{r-1} x + \frac{r(r-1)}{2!} y^{r-2} x^2 + \dots \\ &= y^r \left( 1 + \frac{rx}{y} \left( 1 + \frac{(r-1)x}{2y} \left( 1 + \frac{(r-2)x}{3y} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \\ &= y^r \mathop{\text{R}}_{n=0} \frac{(r-n)x}{(n+1)y} \end{aligned}$$

であるので、

$$r_{0,n} = \frac{(r-n)x}{(n+1)y}$$

である。ここで分配関数  $s_{0,n}$  を定数  $p$  とする。すなわち  $s_{0,n} = p$  とすると、

$$\begin{aligned} u_{0,n} &= 1 - s_{0,n} + s_{0,n+1}r_{0,n} \\ &= 1 - p + p \frac{(r-n)x}{(n+1)y} \\ &= \frac{(1-p)(n+1) + (r-n)px/y}{n+1} \\ &= \frac{(1-p)(n+1) - (n+1)px/y + (r+1)px/y}{n+1} \\ &= \frac{(1-p-px/y)(n+1) + (r+1)px/y}{n+1} \end{aligned}$$

となる。 $u_{0,n}$  が簡単になるように、

$$1 - p - px/y = 0$$

とすれば、

$$s_{0,n} = p = \frac{1}{1+x/y} = \frac{y}{y+x}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} u_{0,n} &= \frac{(r+1)\frac{y}{y+x} \frac{x}{y}}{n+1} \\ &= \frac{(r+1)x}{(n+1)(y+x)} \end{aligned}$$

となる。次に、

$$\begin{aligned} r_{1,n} &= \frac{u_{0,n+1}}{u_{0,n}} r_{0,n} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(r-n)x}{(n+1)y} \\ &= \frac{(r-n)x}{(n+2)y} \end{aligned}$$

である。 $s_{1,n}$  も  $s_{1,n} = p$  とすると、

$$\begin{aligned} u_{1,n} &= 1 - p + p \frac{(r-n)x}{(n+2)y} \\ &= \frac{(1-p-px/y)(n+2) + (r+2)px/y}{n+2} \end{aligned}$$

となる。 $u_{1,n}$  が簡単になるように、

$$s_{1,n} = p = \frac{y}{y+x}$$

とすれば、

$$u_{1,n} = \frac{(r+2)x}{(n+2)(y+x)}$$

となる。よって、

$$s_{k,n} = \frac{y}{y+x}, \quad u_{k,n} = \frac{(r+k+1)x}{(n+k+1)(y+x)}$$

と推測できる。今  $n = 0$  から収束を加速すると、

$$\begin{aligned} (y+x)^r &= y^r \left( s_{k,0} \overset{\infty}{\mathbb{R}} u_{k,0} \right) \\ &= \frac{y^{r+1}}{y+x} \overset{\infty}{\mathbb{R}}_{k=0} \frac{(r+k+1)x}{(k+1)(y+x)} \\ &= \frac{y^{r+1}}{y+x} \left( 1 + \frac{(r+1)x}{1 \cdot (y+x)} \left( 1 + \frac{(r+2)x}{2 \cdot (y+x)} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \end{aligned}$$

がえられる。特に  $y = 1$  の時、

$$(1+x)^r = \frac{1}{1+x} \left( 1 + \frac{(r+1)x}{1 \cdot (1+x)} \left( 1 + \frac{(r+2)x}{2 \cdot (1+x)} \left( 1 + \dots \right) \right) \right)$$

となる。

## 付録 C フィボナッチ数のある一般化

ここでは、次の漸化式を考える。

$$F_0^{[k]} = k, F_1^{[k]} = 1, F_n^{[k]} = F_{n-1}^{[k]} + F_{n-2}^{[k]}$$

特に、 $k = 0$  の場合 Fibonacci 数で、 $k = 2$  の場合 Lucas 数であることに注意する。

また、この数は次のようにしても得られる。まず<sup>\*</sup>、Fibonacci 数を  $F_0^{[0]} = 0, F_1^{[0]} = 1, F_n^{[0]} = F_{n-1}^{[0]} + F_{n-2}^{[0]}$  ( $n \geq 2$ ) で定義し、次に

$$\begin{cases} F_0^{[k]} = k & (k \geq 1) \\ F_n^{[k]} = F_n^{[0]} + kF_{n-1}^{[0]} & (n \geq 1) \end{cases}$$

で計算する。これは本編でみたように、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\because F_1 = 1, F_0 = 0) \end{aligned}$$

であることから、一般化フィボナッチ数列  $F_n^{[k]}$  に対しても、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+2}^{[k]} & F_{n+1}^{[k]} \\ F_{n+1}^{[k]} & F_n^{[k]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2^{[k]} & F_1^{[k]} \\ F_1^{[k]} & F_0^{[k]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1}^{[0]} & F_n^{[0]} \\ F_n^{[0]} & F_{n-1}^{[0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (k+1)F_{n+1}^{[0]} + F_n^{[0]} & F_{n+1}^{[0]} + kF_n^{[0]} \\ (k+1)F_n^{[0]} + F_{n-1}^{[0]} & F_n^{[0]} + kF_{n-1}^{[0]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kF_{n+1}^{[0]} + F_{n+2}^{[0]} & F_{n+1}^{[0]} + kF_n^{[0]} \\ kF_n^{[0]} + F_{n+1}^{[0]} & F_n^{[0]} + kF_{n-1}^{[0]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、

$$F_n^{[k]} = F_n^{[0]} + kF_{n-1}^{[0]}$$

が得られる。次に数値例を示す。

$n$	$F_n^{[0]}$	$F_n^{[1]}$	$F_n^{[2]}$	$F_n^{[3]}$	$F_n^{[4]}$	$F_n^{[5]}$	$F_n^{[6]}$	$F_n^{[7]}$
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	3	4	5	6	7	8	9
4	3	5	7	9	11	13	15	17
5	5	8	11	14	17	20	23	26
6	8	13	18	23	28	33	38	43
7	13	21	29	37	45	53	61	69
8	21	34	47	60	73	86	99	112
9	34	55	76	97	118	139	160	181
10	55	89	123	157	191	225	259	293
11	89	144	199	254	309	364	419	474
12	144	233	322	411	500	589	678	767
13	233	377	521	665	809	953	1097	1241
14	377	610	843	1076	1309	1542	1775	2008
15	610	987	1364	1741	2118	2495	2872	3249
16	987	1597	2207	2817	3427	4037	4647	5257
17	1597	2584	3571	4558	5545	6532	7519	8506
18	2584	4181	5778	7375	8972	10569	12166	13763



## C.1 一般項

特性方程式は  $x^2 - x - 1 = 0$  であり、2つの解を  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  とすると、 $F_n^{[k]}$  の一般項は、係数  $c, d$  を用いて、

$$F_n^{[k]} = c\alpha^n + d\beta^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表される。 $F_1^{[k]} = 1$ ,  $F_2^{[k]} = k + 1$  から導かれる連立方程式

$$\begin{cases} c\alpha + d\beta = 1 \\ c\alpha^2 + d\beta^2 = k + 1 \end{cases}$$

を解くと、 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$  と  $\beta^2 - \beta - 1 = 0$  とから  $c = \frac{1 - k\beta}{\alpha - \beta}$ ,  $d = \frac{k\alpha - 1}{\alpha - \beta}$  となり、

$$\begin{aligned} F_n^{[k]} &= \left( \frac{2 - k + \sqrt{5}k}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{k - 2 + \sqrt{5}k}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{k}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

が得られる。 $k = 0$  の時 Fibonacci 数になり、 $k = 2$  の時 Lucas 数になることが確認できる。また最後の式は、 $F_n^{[k]} = F_n^{[0]} + kF_{n-1}^{[0]}$  に対応する。

## C.2 母関数

母関数は、次のとおりである。

$$\frac{k - (k-1)x}{1 - x - x^2} = F_0^{[k]} + F_1^{[k]}x + F_2^{[k]}x^2 + F_3^{[k]}x^3 + \dots$$

## C.3 関係式

### C.3.1 加法定理

加法定理を次に示す。

$$F_{n+m}^{[k]} = F_m^{[0]}F_{n+1}^{[k]} + F_{m-1}^{[0]}F_n^{[k]}$$

### C.3.2 カッシーニ・シムソン型の関係式

よく知られたカッシーニ・シムソンの定理は、最初の式で  $k = 0, m = 1$  の場合である。

$$\begin{aligned} F_{n-m}^{[k]}F_{n+m}^{[k]} - \left(F_n^{[k]}\right)^2 &= (-1)^{n-m} (k^2 + k - 1) \left(F_m^{[0]}\right)^2 \\ F_n^{[k-m]}F_n^{[k+m]} - \left(F_n^{[k]}\right)^2 &= -m^2 \left(F_{n-1}^{[0]}\right)^2 \end{aligned}$$

### C.3.3 その他の関係式

いくつか例示するが、証明できていない式も多い。参考文献 [1][2] には、他にも多くの Fibonacci 数になっている関する関係式が記載されている。それらを一般化したときどうなるか、確認する必要がある。

$$\begin{aligned} F_{n+m}^{[k]} + (-1)^m F_{n-m}^{[k]} &= F_m^{[2]} F_n^{[k]} \\ \left(F_1^{[k]}\right)^2 + \left(F_2^{[k]}\right)^2 + \left(F_3^{[k]}\right)^2 + \dots + \left(F_n^{[k]}\right)^2 &= F_n^{[k]} F_{n+1}^{[k]} - k \\ F_1^{[k]} + F_2^{[k]} + F_3^{[k]} + \dots + F_n^{[k]} &= F_{n+2}^{[k]} - (k+1) \\ F_1^{[k]} + F_3^{[k]} + F_5^{[k]} + \dots + F_{2n-1}^{[k]} &= F_{2n}^{[k]} - k \\ F_2^{[k]} + F_4^{[k]} + F_6^{[k]} + \dots + F_{2n}^{[k]} &= F_{2n+1}^{[k]} - 1 \\ F_n^{[k]} + F_n^{[k+1]} + F_n^{[k+2]} + \dots + F_n^{[k+2m]} &= (2m+1)F_n^{[k+m]} \\ F_n^{[k]} + F_n^{[k+2]} + F_n^{[k+4]} + \dots + F_n^{[k+2m]} &= (m+1)F_n^{[k+m]} \\ \left(F_n^{[k]} F_{n+3}^{[k]}\right)^2 + \left(2F_{n+1}^{[k]} F_{n+2}^{[k]}\right)^2 &= \left[(k-1)F_{2n+2}^{[k]} + F_{2n+4}^{[k]}\right]^2 \end{aligned}$$

例えば、 $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$  を用いると、

$$\begin{aligned} F_{n-1}^{[k]} + F_{n+1}^{[k]} &= F_{n-1}^{[0]} + kF_{n-2}^{[0]} + F_{n+1}^{[0]} + kF_n^{[0]} \\ &= F_n^{[2]} + kF_{n-1}^{[2]} \quad (\because F_{n-1} + F_{n+1} = L_n) \\ &= F_n^{[0]} + 2F_{n-1}^{[0]} + k \left( F_{n-1}^{[0]} + 2F_{n-2}^{[0]} \right) \\ &= F_n^{[0]} + (k+2)F_{n-1}^{[0]} + 2kF_{n-2}^{[0]} \\ &= F_n^{[k+2]} + 2kF_{n-2}^{[0]} \end{aligned}$$

が得られる。これは  $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$  の拡張になっている。

## C.4 Fibonacci 多項式と Lucas 多項式の一般化

もともとの Fibonacci 多項式は、次のように定義される。

$$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1, F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$$

最初の 11 項を書き出してみると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_0(x) &= 0 \\
F_1(x) &= 1 \\
F_2(x) &= x \\
F_3(x) &= x^2 + 1 \\
F_4(x) &= x^3 + 2x \\
F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\
F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \\
F_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1 \\
F_8(x) &= x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x \\
F_9(x) &= x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1 \\
F_{10}(x) &= x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

したがって、一般化 Fibonacci 多項式を、次のように定義する。

$$F_0^{[k]}(x) = k, F_1^{[k]}(x) = 1, F_n^{[k]}(x) = xF_{n-1}^{[k]}(x) + F_{n-2}^{[k]}(x)$$

最初の 11 項を書き出してみると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_0^{[k]}(x) &= k \\
F_1^{[k]}(x) &= 1 \\
F_2^{[k]}(x) &= x + k &= F_2(x) + kF_1(x) \\
F_3^{[k]}(x) &= x^2 + kx + 1 &= F_3(x) + kF_2(x) \\
F_4^{[k]}(x) &= x^3 + kx^2 + 2x + k &= F_4(x) + kF_3(x) \\
F_5^{[k]}(x) &= x^4 + kx^3 + 3x^2 + 2kx + 1 &= F_5(x) + kF_4(x) \\
F_6^{[k]}(x) &= x^5 + kx^4 + 4x^3 + 3kx^2 + 3x + k &= F_6(x) + kF_5(x) \\
F_7^{[k]}(x) &= x^6 + kx^5 + 5x^4 + 4kx^3 + 6x^2 + 3kx + 1 &= F_7(x) + kF_6(x) \\
F_8^{[k]}(x) &= x^7 + kx^6 + 6x^5 + 5kx^4 + 10x^3 + 6kx^2 + 4x + k &= F_8(x) + kF_7(x) \\
F_9^{[k]}(x) &= x^8 + kx^7 + 7x^6 + 6kx^5 + 15x^4 + 10kx^3 + 10x^2 + 4kx + 1 &= F_9(x) + kF_8(x) \\
F_{10}^{[k]}(x) &= x^9 + kx^8 + 8x^7 + 7kx^6 + 21x^5 + 15kx^4 + 20x^3 + 10kx^2 + 5x + k &= F_{10}(x) + kF_9(x)
\end{aligned}$$

一方、Lucas 多項式は、

$$L_0(x) = 2, L_1(x) = x, L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

により定義される、最初の 11 項を書き出してみると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 2 \\
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= x^2 + 2 \\
L_3(x) &= x^3 + 3x \\
L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \\
L_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x \\
L_6(x) &= x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \\
L_7(x) &= x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x \\
L_8(x) &= x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2 \\
L_9(x) &= x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x \\
L_{10}(x) &= x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2
\end{aligned}$$

先ほどと同様に、Lucas 多項式を一般化すると、

$$L_0^{[k]}(x) = 2 - kx, L_1^{[k]}(x) = x + 2k, L_n^{[k]}(x) = xL_{n-1}^{[k]}(x) + L_{n-2}^{[k]}(x)$$

となる、最初の 11 項を書き出してみると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
L_0^{[k]} &= 2 - kx \\
L_1^{[k]} &= x + 2k \\
L_2^{[k]} &= x^2 + kx + 2 &= L_2(x) + kL_1(x) \\
L_3^{[k]} &= x^3 + kx^2 + 3x + 2k &= L_3(x) + kL_2(x) \\
L_4^{[k]} &= x^4 + kx^3 + 4x^2 + 3kx + 2 &= L_4(x) + kL_3(x) \\
L_5^{[k]} &= x^5 + kx^4 + 5x^3 + 4kx^2 + 5x + 2k &= L_5(x) + kL_4(x) \\
L_6^{[k]} &= x^6 + kx^5 + 6x^4 + 5kx^3 + 9x^2 + 5kx + 2 &= L_6(x) + kL_5(x) \\
L_7^{[k]} &= x^7 + kx^6 + 7x^5 + 6kx^4 + 14x^3 + 9kx^2 + 7x + 2k &= L_7(x) + kL_6(x) \\
L_8^{[k]} &= x^8 + kx^7 + 8x^6 + 7kx^5 + 20x^4 + 14kx^3 + 16x^2 + 7kx + 2 &= L_8(x) + kL_7(x) \\
L_9^{[k]} &= x^9 + kx^8 + 9x^7 + 8kx^6 + 27x^5 + 20kx^4 + 30x^3 + 16kx^2 + 9x + 2k &= L_9(x) + kL_8(x) \\
L_{10}^{[k]} &= x^{10} + kx^9 + 10x^8 + 9kx^7 + 35x^6 + 27kx^5 + 50x^4 + 30kx^3 + 25x^2 + 9kx + 2 &= L_{10}(x) + kL_9(x)
\end{aligned}$$

一般化 Lucas 多項式と異なり、 $F_n^{[2]}(x)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_0^{[2]}(x) &= 2 \\
F_1^{[2]}(x) &= 1 \\
F_2^{[2]}(x) &= x + 2 \\
F_3^{[2]}(x) &= x^2 + 2x + 1 \\
F_4^{[2]}(x) &= x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \\
F_5^{[2]}(x) &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \\
F_6^{[2]}(x) &= x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 2 \\
F_7^{[2]}(x) &= x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \\
F_8^{[2]}(x) &= x^7 + 2x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 12x^2 + 4x + 2 \\
F_9^{[2]}(x) &= x^8 + 2x^7 + 7x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 8x + 1 \\
F_{10}^{[2]}(x) &= x^9 + 2x^8 + 8x^7 + 14x^6 + 21x^5 + 30x^4 + 20x^3 + 20x^2 + 5x + 2
\end{aligned}$$

Binet 型の式は、Fibonacci 多項式に関しては、次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_n^{[k]}(x) &= \frac{2+k(-x+\sqrt{x^2+4})}{2\sqrt{x^2+4}} \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n - \frac{2-k(x+\sqrt{x^2+4})}{2\sqrt{x^2+4}} \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \left[ \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n - \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n \right] \\
&\quad + \frac{k}{\sqrt{x^2+4}} \left[ \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

さらに、Lucas 多項式の場合は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
L_n^{[k]}(x) &= \frac{2+k(-x+\sqrt{x^2+4})}{2} \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n + \frac{2-k(x+\sqrt{x^2+4})}{2} \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n \\
&= \left[ \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n + \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n \right] + k \left[ \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^{n-1} + \left( \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

さらに、次の式も確認できる。

$$\left[ 2+k(-x+\sqrt{x^2+4}) \right] \left( \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \right)^n = L_n^{[k]}(x) + F_n^{[k]}(x)\sqrt{x^2+4}$$

また、 $F_n^{[k]}(x)$  の行列式表現は次のようになる。

$$\begin{aligned}
F_n^{[k]}(x) &= F_n(x) + kF_{n-1}(x) \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ 1 & x & -1 & & \\ & 1 & x & -1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x & -1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 0 & & & \\ 0 & x & -1 & & \\ & 1 & x & -1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x & -1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+k & -1 & & & \\ 1 & x & -1 & & \\ & 1 & x & -1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x & -1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

## C.5 関係式

### C.5.1 加法定理

加法定理を次に示す。

$$F_{n+m}^{[k]}(x) = F_m^{[0]}(x)F_{n+1}^{[k]}(x) + F_{m-1}^{[0]}(x)F_n^{[k]}(x)$$

### C.5.2 カッシーニ・シムソン型の関係式

よく知られたカッシーニ・シムソンの定理は、最初の式で  $k=0, m=1, x=1$  の場合である。

$$\begin{aligned}
F_{n-m}^{[k]}(x)F_{n+m}^{[k]}(x) - \left( F_n^{[k]}(x) \right)^2 &= (-1)^{n-m} (k^2 + kx - 1) \left( F_m^{[0]}(x) \right)^2 \\
F_n^{[k-m]}(x)F_n^{[k+m]}(x) - \left( F_n^{[k]}(x) \right)^2 &= -m^2 \left( F_{n-1}^{[0]}(x) \right)^2
\end{aligned}$$

### C.5.3 その他の関係式

いくつか例示する。ほかにも多くの関係式が存在する。

$$\begin{aligned}
F_{2n}^{[k]}(x) &= F_n^{[k]}L_n^{[0]}(x) + (-1)^n k \\
F_{n-1}^{[k]}(x) + F_{n+1}^{[k]}(x) &= F_n^{[k+2]}(x) + (x-1)F_n^{[k]}(x) + 2kF_{n-2}^{[0]}(x)
\end{aligned}$$

## C.6 一般化 Fibonacci 多項式と一般化 Lucas 多項式の母関数

この項では、一般化 Fibonacci 多項式と Lucas 多項式を求めてみる。

最初に、特性方程式  $1 + xt - t^2 = 0$  を  $t$  について解き、その解を  $\alpha(x) = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ ,  $\beta(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$  とおく。

母関数  $G_F^{[k]}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{[k]}(x)t^n$  と  $G_L^{[k]}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{[k]}(x)t^n$  は、次のように書けるはずである。

$$G(t) = \frac{A}{t - \alpha(x)} - \frac{B}{t - \beta(x)} \quad A, B \text{ は実数}$$

この式をマクローリン展開すると、

$$G(t) = \frac{(A+B)\sqrt{x^2+4} + (B-A)x}{2} + \frac{(A+B)x\sqrt{x^2+4} + (B-A)(x^2+2)t}{2} + \frac{(A+B)(x^2+1)\sqrt{x^2+4} + (B-A)x(x^2+3)t^2}{2} + \dots$$

となるが、 $t$  の 0 次の係数を  $c_0$ 、1 次の係数を  $c_1$  とする。一般化 Fibonacci 多項式を求める場合、 $c_0 = k$ ,  $c_1 = 1$  なので、これを  $A, B$  について解くと、

$$A = \frac{(kx^2 - x + 2k)\sqrt{x^2+4} + kx^3 - x^2 + 4kx - 4}{2(x^2+4)}$$

$$B = \frac{(kx^2 - x + 2k)\sqrt{x^2+4} - kx^3 + x^2 - 4kx + 4}{2(x^2+4)}$$

となる。通分してまとめると、

$$G_F^{[k]}(t) = \frac{A}{t - \alpha(x)} - \frac{B}{t - \beta(x)}$$

$$= \frac{k + (1 - kx)t}{1 - xt - t^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{[k]}(x)t^n$$

となる。一方一般化 Lucas 多項式の場合は、 $c_0 = 2 - kt$ ,  $c_1 = x + 2k$  なので、これを  $A, B$  について解くと、

$$A = \frac{(1 - kx)\sqrt{x^2+4} - kx^2 + x - 2k}{2}$$

$$B = \frac{(1 - kx)\sqrt{x^2+4} + kx^2 - x + 2k}{2}$$

となる。通分してまとめると、

$$G_L^{[k]}(t) = \frac{A}{t - \alpha(x)} - \frac{B}{t - \beta(x)}$$

$$= \frac{2 - kx + (kx^2 - x + 2k)t}{1 - xt - t^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{[k]}(x)t^n$$

となる。

## C.7 一般化 Fibonacci 多項式の特値

先に述べた次式

$$F_n^{[k]}(x) = \frac{2 + k(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{2\sqrt{x^2 + 4}} \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^n - \frac{2 - k(x + \sqrt{x^2 + 4})}{2\sqrt{x^2 + 4}} \left( \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^n$$

をもとに、いくつかの特値を求めてみる。まず、

$$F_n^{[k]}(3/2) = \frac{k+2}{5} \cdot 2^n + \frac{2(2k-1)}{5} \left( -\frac{1}{2} \right)^n$$

$$F_n^{[k]}(8/3) = \frac{k+3}{10} \cdot 3^n + \frac{3(3k-1)}{10} \left( -\frac{1}{3} \right)^n$$

$$F_n^{[k]}(15/4) = \frac{k+4}{17} \cdot 4^n + \frac{4(4k-1)}{17} \left( -\frac{1}{4} \right)^n$$

$$F_n^{[k]}(24/5) = \frac{k+5}{26} \cdot 5^n + \frac{5(5k-1)}{26} \left( -\frac{1}{5} \right)^n$$

$$F_n^{[k]}(48/7) = \frac{k+7}{50} \cdot 7^n + \frac{7(7k-1)}{50} \left( -\frac{1}{7} \right)^n$$

$$F_n^{[k]}(99/10) = \frac{k+10}{101} \cdot 10^n + \frac{10(10k-1)}{101} \left( -\frac{1}{10} \right)^n$$

等から、 $F_n^{[-2]}(3/2) = \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ ,  $F_n^{[1/2]}(3/2) = 2^{n-1}$ ,  $F_n^{[-10]}(99/10) = \left( -\frac{1}{10} \right)^{n-1}$ ,  $F_n^{[1/10]}(99/10) = 10^{n-1}$  がわかる。したがって、

$$F_2^{[1/2]}(3/2) = 2, \quad F_2^{[1/10]}(99/10) = 10$$

等となる。

## 付録 D 2つの漸化式の関係

ここでは、参考文献 [9] に従い、先に表示した 1 つ目の漸化式 (1)(2) での  $a_n, b_n$  と 2 つ目の漸化式 (3)(4) での  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  との間に、どのような関係があるか明らかにする。また  $\gamma_n, \delta_n$  を  $\alpha_n, \beta_n$  を用いて表してみる。

### D.1 関係式の導出

式 (3)(4) の添え字を一つずらすと、

$$P_{n-1} = \alpha_{n-1}P_{n-2} + \beta_{n-1}Q_{n-2} \quad (7)$$

$$Q_{n-1} = \gamma_{n-1}P_{n-2} + \delta_{n-1}Q_{n-2} \quad (8)$$

が成立する。式 (7) より、 $\beta_{n-1} \neq 0$  のとき、

$$Q_{n-2} = \frac{P_{n-1} - \alpha_{n-1}P_{n-2}}{\beta_{n-1}}$$

となる。式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned} Q_{n-1} &= \gamma_{n-1}P_{n-2} + \frac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}}(P_{n-1} - \alpha_{n-1}P_{n-2}) \\ &= \frac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}}P_{n-1} + \left(\gamma_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}}\right)P_{n-2} \end{aligned}$$

となる。式 (3) に代入すると、

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha_n P_{n-1} + \beta_n \left( \frac{\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} P_{n-1} + \left( \gamma_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} \right) P_{n-2} \right) \\ &= \left( \alpha_n + \frac{\beta_n \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} \right) P_{n-1} + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_{n-1}) P_{n-2} \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。一方式 (8) より、 $\gamma_{n-1} \neq 0$  のとき、

$$P_{n-2} = \frac{Q_{n-1} - \delta_{n-1}Q_{n-2}}{\gamma_{n-1}}$$

となる。式 (7) に代入して、

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= \frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}(Q_{n-1} - \delta_{n-1}Q_{n-2}) + \beta_{n-1}Q_{n-2} \\ &= \frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}Q_{n-1} + \left(\beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}\delta_{n-1}}{\gamma_{n-1}}\right)Q_{n-2} \end{aligned}$$

となる。式 (4) に代入して、

$$\begin{aligned} Q_n &= \gamma_n \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} Q_{n-1} + \left( \beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}\delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} \right) Q_{n-2} \right) + \delta_n Q_{n-1} \\ &= \left( \delta_n + \frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \right) Q_{n-1} + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} (\beta_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\delta_{n-1}) Q_{n-2} \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。式 (1)(2)(9)(10) より、 $n \geq 2$  において、

$$a_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\delta_{n-1}) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} (\beta_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\delta_{n-1}) \quad (11)$$

$$b_n = \alpha_n + \frac{\beta_n \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \delta_n + \frac{\gamma_n \alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \quad (12)$$

が成立する。ここで式 (11) より、 $\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$  となる。よって、

$$\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

となる。したがって、 $\frac{\gamma_1}{\beta_1} = k$  とおくと、 $\gamma_n = k\beta_n$  となる。一方、式 (12) より、

$$\alpha_n + \frac{\beta_n \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \delta_n + \frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \delta_n + \frac{\alpha_{n-1}\beta_n}{\beta_{n-1}}$$

となり、

$$\begin{aligned} \beta_{n-1}(\alpha_n - \delta_n) &= \beta_n(\alpha_{n-1} - \delta_{n-1}) \\ \therefore \frac{\alpha_n - \delta_n}{\beta_n} &= \frac{\alpha_{n-1} - \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \dots = \frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1} \end{aligned}$$

となる。したがって  $\frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1} = j$  とおくと、 $\delta_n = \alpha_n - j\beta_n$  となる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ k\beta_n & \alpha_n - j\beta_n \end{pmatrix}$$

となる。まとめると、 $n \geq 2$  で、

$$\begin{cases} a_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (k\beta_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} - j\beta_{n-1})) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1}(k\beta_{n-1} + j) - \alpha_{n-1}^2) \\ b_n = \alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\alpha_{n-1} - j\beta_{n-1}) \end{cases}$$

が得られる。一方、 $P_{-1} = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ ,  $P_0 = b_0$ ,  $Q_0 = 1$  なので、

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b_0 = \alpha_0, \gamma_0 = 1$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_0 + \beta_1 \\ \gamma_1 b_0 + \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 \\ k\beta_1 \alpha_0 + \alpha_1 - j\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 b_1 + a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} b_0 b_1 + a_1 = \alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 \\ b_1 = k\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 - j\beta_1 \\ b_0 b_1 = \alpha_0 (k\beta_1 \alpha_0 + \alpha_1 - j\beta_1) \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} & b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots} \\ &= b_0 + \frac{(b_0 b_1 + a_1) - b_0 b_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 + \dots + b_n + \dots} \\ &= \alpha_0 + \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0 (k\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 - j\beta_1)}{k\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 - j\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{(k\beta_1^2 - \alpha_1(\alpha_1 - j\beta_1))}{\beta_1} \\ & \quad + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1}(\alpha_1 - j\beta_1)} + \dots + \\ & \quad \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \frac{(k\beta_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} - j\beta_{n-1}))}{\alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}(\alpha_{n-1} - j\beta_{n-1})} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

K 記法を用いて書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & b_0 + \mathop{\text{K}}_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \\
 &= \alpha_0 + \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0 (k \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 - j \beta_1)}{k \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 - j \beta_1} + \mathop{\text{K}}_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (k \beta_{n-1}^2 - \alpha_{n-1} (\alpha_{n-1} - j \beta_{n-1}))}{\alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\alpha_{n-1} - j \beta_{n-1})} \right) \\
 &= t_0 + \mathop{\text{K}}_{n=1}^{\infty} \left( \frac{s_n}{t_n} \right) \\
 & \quad \begin{cases} P_n = t_n P_{n-1} + s_n P_{n-2} \\ Q_n = t_n Q_{n-1} + s_n Q_{n-2} \end{cases} \quad (P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = t_0, Q_0 = 1)
 \end{aligned}$$

## Open Problem

先の付録 A で述べたように、次の二つの方法で得られる漸化式が等しくなるのはなぜか、証明できていない。

### 収束を速めた $\sqrt{a}$ を求めるための漸化式

Newton 法と Secant 法を組み合わせると、 $\sqrt{a}$  の収束計算の近似精度を高めることが可能である。まず、 $g_1(x) = x$  として、

$$g_{m+1}(x) = x - \frac{x^2 - a}{x + g_m(x)} \quad (m \geq 1)$$

によって  $g_m(x)$  を定めると、 $x_{n+1} = g_m(x_n)$  が  $m$  次収束する。次に例示する。

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = g_2(x_n) &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} &&= \frac{x_n^2 + a}{2x_n} && \text{Newton 法} \\
 x_{n+1} = g_3(x_n) &= x_n - \frac{2x_n(x_n^2 - a)}{3x_n^2 + a} &&= \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} && \text{Halley 法} \\
 x_{n+1} = g_4(x_n) &= x_n - \frac{(3x_n^2 + a)(x_n^2 - a)}{4x_n(x_n^2 + a)} &&= \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n(x_n^2 + a)} && \text{super Halley 法} \\
 x_{n+1} = g_5(x_n) &= x_n - \frac{4x_n(x_n^2 + a)(x_n^2 - a)}{5x_n^4 + 10ax_n - 2 + a^2} &&= \frac{x_n(x_n^4 + 10ax_n^2 + 5a^2)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2} \\
 x_{n+1} = g_6(x_n) &= x_n - \frac{(5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2)(x_n^2 - a)}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)} &&= \frac{x_n^6 + 15ax_n^4 + 15a^2x_n^2 + a^3}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)}
 \end{aligned}$$

## 連分数に基づく漸化式

この漸化式は、次に示す方法を用いても得られる。例示すると、

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} &&= \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} &&= \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} &&= \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n(x_n^2 + a)} \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} &&= \frac{x_n(x_n^4 + 10ax_n^2 + 5a^2)}{5x_n^4 + 10ax_n^2 + a^2} \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} + \frac{a - x_n^2}{2x_n} &&= \frac{x_n^6 + 15ax_n^4 + 15a^2x_n^2 + a^3}{2x_n(3x_n^4 + 10ax_n^2 + 3a^2)}
 \end{aligned}$$

となる。

## 参考文献

- [1] 中村滋著、改訂版 フィボナッチ数の小宇宙—フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割、日本評論社、2008、ISBN 978-4-535-78492-5
- [2] T.Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, 2nd ed. Vol.1, Wiley, 2018, ISBN 978-1-118-74212-9
- [3] T.Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, 2nd ed. Vol.2, Wiley, 2019, ISBN 978-1-118-74208-2
- [4] 細矢治夫著、数学のかんどころ 6 ピタゴラスの三角形とその数理、共立出版、2011、ISBN 978-4-320-01986-7
- [5] 細矢治夫著、トポロジカル・インデックス フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学、日本評論社、2012、ISBN 978-4-535-78666-0
- [6] A.Ya.Khinchin, Continued Fractions, Dover, 1997, ISBN 978-0-486-69630-0
- [7] O.Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (1913), Literary Licensing, 2014, ISBN 9781169977747
- [8] S.Khrushchev, Orthogonal Polynomials and Continued Fractions From Euler's Point of View, Cambridge University Press, 2008, ISBN 978-0-521-85419-1
- [9] L.A.Lyusternik, A.R.Yanpol'skii Eds., Mathematical Analysis, Functions, Limits, Series, Continued Fractions, Pergamon Press, 1965, ISBN
- [10] ジョセフ・H・シルヴァーマン著、鈴木治郎訳、はじめての数論 原著第3版：発見と証明の大航海、ピアソン・エデュケーション、2007、ISBN 978-4-89471-492-2
- [11] D. フラナリー著、佐藤かおり訳、佐藤宏樹監訳、 $\sqrt{2}$ の森とアンドリュー少年、シュプリンガー・ジャパン、2008、ISBN 978-4-431-10008-9

- [12] R.W.Gosper, Acceleration of series, Technical Report AIM-304, AI Laboratory, MIT, (March 1974);  
<ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-304.pdf>  
<http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/6088/AIM-304.pdf>
- [13] Dang-Khoa Do, Spigot algorithm and root computing, *Reliable Computing*, vol.7 (2001), 247–273
- [14] 木村 俊一著、連分数のふしぎ、講談社ブルーバックス、2012, ISBN 978-4-06-257770-0
- [15] L.Lorentzen, H.Waadeland, *Continued Fractions with Applications*, North-Holland, 1992, ISBN 0-444-89265-6
- [16] J.Mc Laughlin, N.J.Wyshinski, Ramanujan and extensions and contractions of continued fractions, *Ramanujan J.*, 2007, 14, 389-404
- [17] W.B.Jones, W.J.Thron, *Continued Fractions Analytic Theory and Application*, Cambridge University Press, 1980, ISBN 978-0-521-10152-3
- [18] K.G.Ramanathan, Hypergeometric series and continued fractions, *Proc. Indian Acad. Sci.*, 97(1-3), 1987, 277-296
- [19] A.N.Khovanskii, translated by P.Wynn, *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*, P. Noordhoff, 1963
- [20] 杉原正顯<sup>おき</sup>、室田一雄著、数値計算法の数理 (オンデマンド版)、岩波書店、2012, ISBN 978-4-00-730024-0
- [21] Ioannis K. Argyros, *Newton Methods*, Nova Science Publishers Inc., 2004, ISBN 1-59454-052-7
- [22] Ioannis K. Argyros, *Convergence and Applications of Newton-type Iterations*, Springer, 2008, ISBN 978-0-387-72741-7
- [23] Ioannis K. Argyros, Á. Alberto Magreñán, *Iterative Methods and Their Dynamics with Applications, A Contemporary Study*, CRC Press, 2017, ISBN 978-1-4987-6360-8
- [24] 一松信著、 $\sqrt{2}$  の数学—無理数を見直す、海鳴社、1996、ISBN 978-4-875250562
- [25] [Numbers, constants and computation, Pythagoras' Constant: \$\sqrt{2}\$](#)
- [26] J.Gerlach, Accelerated Convergence in Newton's Method, *SIAM Rev.*, 36(1994), no.2, pp272–276
- [27] W.F.Ford, J.A.Pennline, Accelerated Convergence in Newton's Method, *SIAM Rev.*, 38(1996), no.4, pp658–659
- [28] B.Kalantari, I.Kalantari, High Order iterative Methods for Approximating Square Roots, *BIT*, 36(1996), no.2, pp395–399
- [29] G.Dahlquist, Å.Björk, *Numerical Methods in Scientific Computing*, volume 1, SIAM, 2008, ISBN 978-0-898716-44-3

$$EG = \varphi \quad GH = 1 \quad FG = \varphi^{-1} \quad TG = TS = x \quad UG = UR = y$$

$$1 : \varphi = FT : TS \Rightarrow FG - TG : TS = \varphi^{-1} - x : x$$

$$1 : \varphi = \varphi^{-1} - x : x \Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^{-1} - x}{x} \Rightarrow \varphi^{-1} = \frac{\varphi^{-1}}{x} - 1 \quad \perp$$

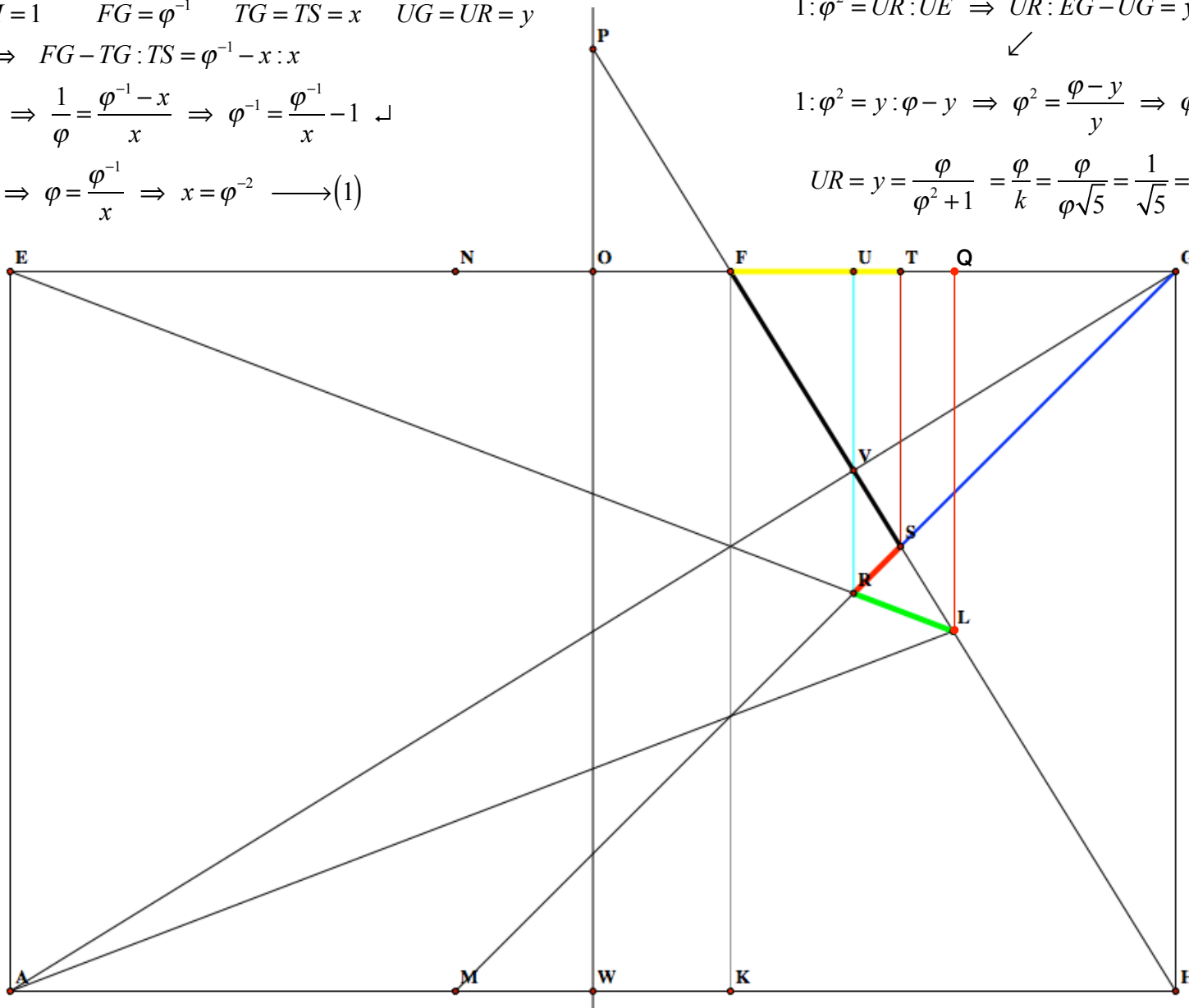
$$\varphi^{-1} + 1 = \frac{\varphi^{-1}}{x} \Rightarrow \varphi = \frac{\varphi^{-1}}{x} \Rightarrow x = \varphi^{-2} \longrightarrow (1)$$

$$1 : \varphi^2 = UR : UE \Rightarrow UR : EG - UG = y : \varphi - y$$

↙

$$1 : \varphi^2 = y : \varphi - y \Rightarrow \varphi^2 = \frac{\varphi - y}{y} \Rightarrow \varphi^2 = \frac{\varphi}{y} - 1 \Rightarrow \varphi^2 + 1 = \frac{\varphi}{y} \quad \perp$$

$$UR = y = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} = \frac{\varphi}{k} = \frac{\varphi}{\varphi\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow (2)$$





$$(1)より \quad TG = TS = x = \varphi^{-2} \Rightarrow GS = \varphi^{-2}\sqrt{2} \longrightarrow(11) \quad (2)より \quad UG = UR = y = \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow GR = 5^{\frac{-1}{2}}\sqrt{2} \longrightarrow(21)$$

五角錐（角部分）の底辺（正五角形）の辺長は $\varphi^{-2}$ なので対角線は $\varphi^{-1}$

五角錐（角部分）を底辺（正五角形）の対角線で切断する。その断面は正三角形（辺長は $\varphi^{-1}$ ）となる。

$$\text{その断面の正三角形の面積は} \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\varphi^{-1})^2 = \frac{\varphi^{-2}\sqrt{3}}{4} \longrightarrow(3)$$

$$(3)より面積①は \frac{\varphi^{-2}\sqrt{3}}{4} \times \varphi^{-2} = \frac{\varphi^{-4}\sqrt{3}}{4} \longrightarrow(31)$$

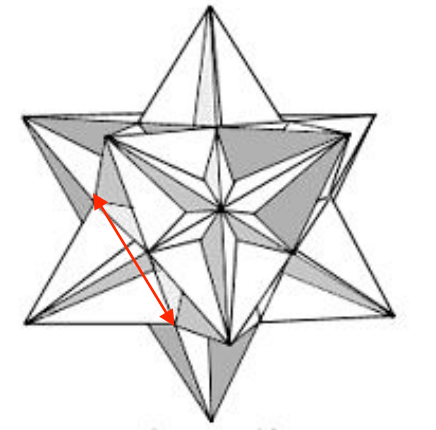
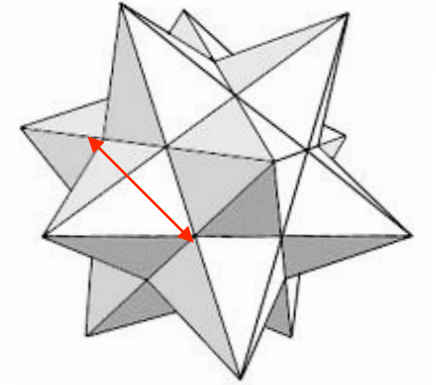
$$(11)(21)(31)より \quad \text{面積 ①+②は} \quad \frac{\varphi^{-4}\sqrt{3}}{4} \times \frac{5^{\frac{-1}{2}}\sqrt{2}}{\varphi^{-2}\sqrt{2}} = \frac{\varphi^{-2}\sqrt{3}}{4} \times 5^{\frac{-1}{2}} = \frac{\varphi^{-2}\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{-2}\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \varphi \times \varphi^{-1}$$

$$= \frac{\varphi^{-3}\sqrt{3}}{4} \times \frac{\varphi\sqrt{5}}{5} = \frac{\varphi^{-3} \cdot k\sqrt{3}}{20} \longrightarrow(32)$$

$$\text{辺長比} \varphi^2 : 1 \text{ の長方形の対角線 } (\varphi^2)^2 + 1 = \varphi^4 + 1 = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 = \varphi^2 + \varphi + \varphi^2 + 1 = 3\varphi^2 \Rightarrow \sqrt{3\varphi^2} = \varphi\sqrt{3} \longrightarrow(39)$$

$$EL \text{ は上記 (39) の長方形の対角線の半分なので、} \overline{EL} = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2} \longrightarrow(40)$$

$$ER \text{ は、辺長比} \varphi^2 : 1 \text{ の長方形の対角線の} 5^{\frac{-1}{2}} \text{ 倍なので、} \overline{ER} = \varphi\sqrt{3} \times 5^{\frac{-1}{2}} = \varphi\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{k\sqrt{3}}{5} \longrightarrow(41)$$



(40)(41)より RLは

$$\begin{aligned}\overline{RL} &= \overline{EL} - \overline{ER} = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{5} = \frac{5\varphi\sqrt{3} - 2k\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}(5\varphi - 2k)}{10} = \frac{\sqrt{3}\{5\varphi - 2(\varphi + 2)\}}{10} = \frac{\sqrt{3}(5\varphi - 2\varphi - 4)}{10} = \frac{\sqrt{3}(3\varphi - 1)}{10} = \frac{\sqrt{3}\{\varphi^{-1}(\varphi^2 + \varphi^{-2}) - 1\}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{3}\{\varphi + \varphi^{-3} - 1\}}{10} = \frac{\sqrt{3}(\varphi^{-1} + \varphi^{-3})}{10} = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi^{-3}(\varphi^2 + 1)}{10} = \frac{\varphi^{-3} \cdot k\sqrt{3}}{10} \longrightarrow (42)\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339 \quad k = \varphi + 2 = \varphi^2 + 1 = \varphi\sqrt{5} \approx 3.6180339$$

(42)より ③の面積は  $\varphi^{-2} \times \frac{\varphi^{-3} \cdot k\sqrt{3}}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}}{20} \longrightarrow (43)$

(32)(43)より 溝部分の面積は (①+②)×2+③ となる。

$$\frac{\varphi^{-3} \cdot k\sqrt{3}}{20} \times 2 + \frac{\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}}{20} = \frac{2\varphi^{-3} \cdot k\sqrt{3} + \varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}}{20} = \frac{\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}(2\varphi^2 + 1)}{20} \longrightarrow (44)$$

(44)より 大20面体の表面積は上記溝部分の60個分なので

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}(2\varphi^2 + 1)}{20} \times 60 &= 3\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}(2\varphi^2 + 1) = 3^{\frac{3}{2}} \cdot \varphi^{-5} \cdot k(2\varphi^2 + 1) = 3^{\frac{3}{2}} \cdot k(2\varphi^{-3} + \varphi^{-5}) \\ &= 3^{\frac{3}{2}}(\varphi^2 + 1)(\varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-6} + \varphi^{-7}) = 3^{\frac{3}{2}}(\varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-6} + \varphi^{-7}) = 3^{\frac{3}{2}}(\varphi^{-1} + \varphi^{-2} + 2\varphi^{-3} + 2\varphi^{-4} + 2\varphi^{-5} + \varphi^{-6} + \varphi^{-7}) \\ &= 3^{\frac{3}{2}}(1 + 4\varphi^{-3} + \varphi^{-5}) = 3^{\frac{3}{2}}\{1 + 4(2\varphi - 3) + 5\varphi - 8\} = 3^{\frac{3}{2}}(1 + 8\varphi - 12 + 5\varphi - 8) = 3^{\frac{3}{2}}(13\varphi - 19) \longrightarrow (45) \\ &\approx 3^{\frac{3}{2}}(13 \times 1.6180339 - 19) \approx 3\sqrt{3}(21.034442 - 19) \approx 5.1962 \times 2.034442 \approx 10.5713675204 \longrightarrow (46)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{V}{S} &= \frac{\frac{32 - 19\varphi}{2}}{3^{\frac{3}{2}}(13\varphi - 19)} = \frac{32 - 19(1 + \varphi^{-1})}{2 \times 3^{\frac{3}{2}}(13\varphi - 19)} = \frac{13 - 19\varphi^{-1}}{2 \times 3^{\frac{3}{2}}(13\varphi - 19)} = \frac{\varphi^{-1}(13\varphi - 19)}{2 \times 3^{\frac{3}{2}}(13\varphi - 19)} = \frac{\varphi^{-1}}{2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\varphi^{-1}}{6\sqrt{3}} = \frac{\varphi^{-1}\sqrt{3}}{6\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\varphi^{-1}\sqrt{3}}{18} = (6\varphi\sqrt{3})^{-1} \\ &\approx \frac{0.618033988749895 \times 1.732050807568877}{18} \approx \frac{1.07046626931927}{18} \approx 0.059470348295515\end{aligned}$$

	枠 (辺長)		体積 volume	表面積 surface area	体積 / 表面積 volume / surface area
小星型12面体	正20面体	1	$\frac{5\varphi^{-2}}{2}$	$\frac{\varphi^{-3} \cdot k^{\frac{1}{2}}}{4} \times 60$	$\frac{\sqrt{5k}}{30}$
大12面体	正20面体		$\frac{5\varphi^{-1}}{2}$	$\frac{\varphi^{-2} \cdot k^{\frac{1}{2}}}{4} \times 60$	$\frac{\sqrt{5k}}{30}$
大星型12面体	正12面体		$\frac{5\varphi^{-1}}{2}$	$\frac{\varphi^{-1} \cdot k^{\frac{1}{2}}}{4} \times 60$	$\frac{\varphi^{-1}\sqrt{5k}}{30}$
大20面体	正20面体		$\frac{32-19\varphi}{2}$	$\frac{\varphi^{-5} \cdot k\sqrt{3}(2\varphi^2+1)}{20} \times 60$	$\frac{\varphi^{-1}\sqrt{3}}{18}$

**ケプラーの多面体** (小星型12面体と大星型12面体) → 1619年にケプラーが小星型12面体と大星型12面体を発見。

**ポアンソの多面体** (大12面体と大20面体) → 1809年にポアンソが大12面体と大20面体を発見。

# cosine abenacci 数と cosine abelucas 数の不等式\*

Dedicated to Kyoani and “Violet”†

渋川元樹‡ (神戸大理)

## 概要

第 17 回日本フィボナッチ協会研究会で発表した対称関数 (完全斉次対称多項式及びベキ和対称多項式) の特殊値に関する一連の不等式について述べる.

## 1 Introduction

$x_1, x_2, \dots, x_r$  を  $r$  個の独立な変数とし, 非負整数  $n$  に対し, 完全斉次対称多項式  $h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$ , ベキ和対称多項式  $p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  をそれぞれ次のように定める.

$$h_n^{(r)} = h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r) := \sum_{m_1 + \dots + m_r = n} x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r},$$
$$p_n^{(r)} = p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r) := \sum_{j=1}^r x_j^n.$$

まず古典的な Fibonacci 数, Lucas 数に関する de Moivre-Vinet の公式

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-k}$$
$$L_n = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

と

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -2 \cos \left( 2 \frac{2\pi}{5} \right), \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -2 \cos \left( 1 \frac{2\pi}{5} \right)$$

\*本研究は科研費 (課題番号: 18J00233) の助成を受けたものである.

†『ヴァイオレット・エヴァーガーデン 外伝 - 永遠と自動手記人形 -』公開日に (06.09.2019).

‡g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

に注意する. すると  $F_{n+1}$  と  $L_n$  は 2 変数の完全斉次対称多項式  $h_n^{(2)}(x_1, x_2)$ , ベキ和対称多項式  $p_n^{(2)}(x_1, x_2)$  に cosine の 5 等分値を代入したもの

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= h_n^{(2)} \left( -2 \cos \left( 1 \frac{2\pi}{5} \right), -2 \cos \left( 2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) \\ L_n &= p_n^{(2)} \left( -2 \cos \left( 1 \frac{2\pi}{5} \right), -2 \cos \left( 2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) \end{aligned}$$

に他ならないことがわかる. この考えを推し進め, 一般に  $r$  変数の  $h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  と  $p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  に  $x_j = -2 \cos \left( \frac{2\pi j}{2r+1} \right)$  を代入した特殊値

$$F_{n+1}^{(r)} := h_n^{(r)} \left( -2 \cos \left( \frac{2\pi}{2r+1} \right), \dots, -2 \cos \left( \frac{2\pi r}{2r+1} \right) \right), \quad (1.1)$$

$$L_n^{(r)} := p_n^{(r)} \left( -2 \cos \left( \frac{2\pi}{2r+1} \right), \dots, -2 \cos \left( \frac{2\pi r}{2r+1} \right) \right) \quad (1.2)$$

(cosine abenacci 数, cosine abelucas 数) を考える ( $F_{n+1}^{(r)}$  の添え数が  $h_n^{(r)}$  と一つズレているのは古典的な Fibonacci 数に合わせたからである). これは Fibonacci 数, Lucas 数 ( $r = 2$  の場合) の自然な高階化であり, Fibonacci 数, Lucas 数に類する多くの性質が成り立つ.

この cosine の等分値を用いた (つまり指数和としての) 定義は対称関数論的には扱いやすいが, 具体的な計算には向かない. 実際, 変数の数  $r$  や次数  $n$  が大きくなるに従い数値計算の誤差も大きくなるし, たとえば整数性さえもパツと見では自明に思えないかもしれない. 他方, 対称関数の一般論より次がわかる (厳密には cosine abelucas 数  $L_n^{(r)}$  の方の初期値の決定には後述の Theorem 1.2 も必要になる).

**Theorem 1.1.**  $F_n^{(r)}, L_n^{(r)}$  は, それぞれ  $r$  個の初期値が

$$\begin{aligned} F_1^{(r)} &= 1, \quad F_0^{(r)} = F_{-1}^{(r)} = \dots = F_{-r+2}^{(r)} = 0, \\ L_n^{(r)} &= \begin{cases} -2^{2m-1} + \frac{2r+1}{2} \binom{2m}{m} & (n = 2m) \\ 4^m & (n = 2m+1) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots, r-1) \end{aligned}$$

で漸化式

$$a_{n+r}^{(r)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r-1-j}{j} a_{n+r-1-2j}^{(r)} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r-1-j}{j+1} a_{n+r-2-2j}^{(r)}$$

を満たす数列として定まる. ここで  $\lfloor x \rfloor$  は実数  $x$  を越えない最大の整数であり,  $\binom{n}{k}$  は二項係数

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & (k \neq 0) \\ 1 & (k = 0) \end{cases}.$$

元の定義 (1.1), (1.2) ではなく, この Theorem 1.1 を  $F_n^{(r)}$ ,  $L_n^{(r)}$  の定義と思ってもよい. いくつか例を計算すれば以下のようになる.

$$\underline{r = 1} \quad a_{n+1}^{(1)} = a_n^{(1)}, F_1^{(1)} = 1, L_0^{(1)} = 1.$$

$$F_n^{(1)}, L_n^{(1)} : 1, \dots$$

$$\underline{r = 2 \text{ (Fibonacci numbers \& Lucas numbers)}}$$

$$a_{n+2}^{(2)} = a_{n+1}^{(2)} + a_n^{(2)}, F_{-1}^{(2)} = 0, F_0^{(2)} = 1, L_0^{(2)} = 2, L_1^{(2)} = 1.$$

$$F_n^{(2)} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, \dots$$

$$L_n^{(2)} : 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, \dots$$

$$\underline{r = 3 \text{ (OEIS A006053 \& OEIS A096975)}}$$

$$a_{n+3}^{(3)} = a_{n+2}^{(3)} + 2a_{n+1}^{(3)} - a_n^{(3)}, F_{-1}^{(3)} = F_0^{(3)} = 0, F_1^{(3)} = 1, L_0^{(3)} = 3, L_1^{(3)} = 1, L_2^{(3)} = 5.$$

$$F_n^{(3)} : 1, 1, 3, 4, 9, 14, 28, 47, 89, 155, 286, 507, 924, 1652, 2993, 5373, 9707, 17460, 31501, \dots$$

$$L_n^{(3)} : 3, 1, 5, 4, 13, 16, 38, 57, 117, 193, 370, 639, 1186, 2094, 3827, 6829, 12389, 22220, \dots$$

$$\underline{r = 4 \text{ (OEIS A188021 \& OEIS A094649)}} \quad a_{n+4}^{(4)} = a_{n+3}^{(4)} + 3a_{n+2}^{(4)} - 2a_{n+1}^{(4)} - a_n^{(4)},$$

$$F_{-2}^{(4)} = F_{-1}^{(4)} = F_0^{(4)} = 0, F_1^{(4)} = 1, L_0^{(4)} = 4, L_1^{(4)} = 1, L_2^{(4)} = 7, L_3^{(4)} = 4.$$

$$F_n^{(4)} : 1, 1, 4, 5, 14, 20, 48, 75, 165, 274, 571, 988, 1988, 3536, 6953, 12597, 24396, 44745, \dots$$

$$L_n^{(4)} : 4, 1, 7, 4, 19, 16, 58, 64, 187, 247, 622, 925, 2110, 3394, 7252, 12289, 25147, 44116, \dots$$

$$\underline{r = 5 \text{ (OEIS A231181 \& OEIS A189234)}} \quad a_{n+5}^{(5)} = a_{n+4}^{(5)} + 4a_{n+3}^{(5)} - 3a_{n+2}^{(5)} - 3a_{n+1}^{(5)} + a_n^{(5)},$$

$$F_{-3}^{(5)} = F_{-2}^{(5)} = F_{-1}^{(5)} = F_0^{(5)} = 0, F_1^{(5)} = 1, L_0^{(5)} = 5, L_1^{(5)} = 1, L_2^{(5)} = 9, L_3^{(5)} = 4, L_4^{(5)} = 25.$$

$$F_n^{(5)} : 1, 1, 5, 6, 20, 27, 75, 110, 275, 429, 1001, 1637, 3639, 6172, 13243, 23104, 48280, \dots$$

$$L_n^{(5)} : 5, 1, 9, 4, 25, 16, 78, 64, 257, 256, 874, 1013, 3034, 3953, 10684, 15229, 38017, 58056, \dots$$

$$\underline{r = 6} \quad a_{n+6}^{(6)} = a_{n+5}^{(6)} + 5a_{n+4}^{(6)} - 4a_{n+3}^{(6)} - 6a_{n+2}^{(6)} + 3a_{n+1}^{(6)} + a_n^{(6)},$$

$$F_{-4}^{(6)} = F_{-3}^{(6)} = F_{-2}^{(6)} = F_{-1}^{(6)} = F_0^{(6)} = 0, F_1^{(6)} = 1,$$

$$L_0^{(6)} = 6, L_1^{(6)} = 1, L_2^{(6)} = 11, L_3^{(6)} = 4, L_4^{(6)} = 31, L_5^{(6)} = 16.$$

$$F_n^{(6)} : 1, 1, 6, 7, 27, 35, 110, 154, 429, 637, 1638, 2548, 6188, 9995, 23255, 38741, 87190, 149017, \dots$$

$$L_n^{(6)} : 6, 1, 11, 4, 31, 16, 98, 64, 327, 256, 1126, 1024, 3958, 4083, 14116, 16189, 50887, 63768, \dots$$

参考までにこれらをまとめて,  $F_n^{(r)}$  と  $L_n^{(r)}$  の  $r$  と  $n$  についての tables を以下に述べておく.

$r \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
3	1	1	3	4	9	14	28	47	89	155	286	507	924	1652
4	1	1	4	5	14	20	48	75	165	274	571	988	1988	3536
5	1	1	5	6	20	27	75	110	275	429	1001	1637	3639	6172
6	1	1	6	7	27	35	110	154	429	637	1638	2548	6188	9995
7	1	1	7	8	35	44	154	208	637	910	2548	3808	9996	15504
8	1	1	8	9	44	54	208	273	910	1260	3808	5508	15504	23256
9	1	1	9	10	54	65	273	350	1260	1700	5508	7752	23256	33915
10	1	1	10	11	65	77	350	440	1700	2244	7752	10659	33915	48279
11	1	1	11	12	77	90	440	544	2244	2907	10659	14364	48279	67298
12	1	1	12	13	90	104	544	663	2907	3705	14364	19019	67298	92092
13	1	1	13	14	104	119	663	798	3705	4655	19019	24794	92092	123970
14	1	1	14	15	119	135	798	950	4655	5775	24794	31878	123970	164450

表 1:  $F_n^{(r)}$

$r \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843
3	3	1	5	4	13	16	38	57	117	193	370	639	1186	2094	3827
4	4	1	7	4	19	16	58	64	187	247	622	925	2110	3394	7252
5	5	1	9	4	25	16	78	64	257	256	874	1013	3034	3953	10684
6	6	1	11	4	31	16	98	64	327	256	1126	1024	3958	4083	14116
7	7	1	13	4	37	16	118	64	397	256	1378	1024	4882	4096	17548
8	8	1	15	4	43	16	138	64	467	256	1630	1024	5806	4096	20980
9	9	1	17	4	49	16	158	64	537	256	1882	1024	6730	4096	24412
10	10	1	19	4	55	16	178	64	607	256	2134	1024	7654	4096	27844
11	11	1	21	4	61	16	198	64	677	256	2386	1024	8578	4096	31276
12	12	1	23	4	67	16	218	64	747	256	2638	1024	9502	4096	34708
13	13	1	25	4	73	16	238	64	817	256	2890	1024	10426	4096	38140
14	14	1	27	4	79	16	258	64	887	256	3142	1024	11350	4096	41572
15	15	1	29	4	85	16	278	64	957	256	3394	1024	12274	4096	45004

表 2:  $L_n^{(r)}$

この漸化式による表示, 計算は元の指数和としての定義より扱いやすいものであるが, 昨年は更に扱いやすい  $F_n^{(r)}$  と  $L_n^{(r)}$  の二項係数による以下のような明示公式について述べた.

**Theorem 1.2.** 任意の非負整数  $n$  と正の整数  $r$  について

$$\begin{aligned} F_n^{(r)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2} \left( (-1)^{\lfloor \frac{n-2k-1}{2r+1} \rfloor} - (-1)^{\lfloor \frac{n-2k-3}{2r+1} \rfloor} \right) \left( \binom{n+r-2}{k} - \binom{n+r-2}{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2r+1} \rfloor} (-1)^k \left( \binom{n+r-2}{\lfloor \frac{n-(2r+1)k-1}{2} \rfloor} - \binom{n+r-2}{\lfloor \frac{n-3-(2r+1)k}{2} \rfloor} \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} L_n^{(r)} &= (-1)^{n+1} 2^{n-1} + (-1)^n \frac{2r+1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_{2r+1|n-2k} \\ &= \begin{cases} -2^{2m-1} + \frac{2r+1}{2} \sum_{k=-\lfloor \frac{m}{2r+1} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2r+1} \rfloor} \binom{2m}{m-(2r+1)k} & (n = 2m) \\ 4^m - \frac{2r+1}{2} \sum_{k=-\lfloor \frac{m+r+1}{2r+1} \rfloor}^{\lfloor \frac{m-r}{2r+1} \rfloor} \binom{2m+1}{m-(2r+1)k-r} & (n = 2m+1) \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

ただし,

$$\delta_{2r+1|n-2k} := \begin{cases} 1 & 2r+1 \mid n-2k \\ 0 & 2r+1 \nmid n-2k \end{cases}.$$

これは  $F_n^{(r)}$ ,  $L_n^{(r)}$  の元の定義を指数和と思った時の, 離散 Fourier 変換 (係数) にあたる一種の双対表示とみなせる. この公式が優れている点の変数の数  $r$  が大きければ大きいほど, 和の足す項の数が少なくなっていく点である. 実際, 古典的な Fibonacci 数  $F_n$  の良く知られた二項係数の表示式

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$$

と比べても, 我々の表示式

$$F_n^{(2)} = F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} (-1)^k \left( \binom{n}{\lfloor \frac{n-5k-1}{2} \rfloor} - \binom{n}{\lfloor \frac{n-3-5k}{2} \rfloor} \right)$$

は恐らく新しい上に, より高精度 (項の数に比して近似の精度が高い) だと思われる. 特に次数  $n$  に比して, 変数  $r$  が十分大きければ (1.3), (1.4) が著しく簡単になり, 次が得られる.



**Corollary 1.3.**  $n < 2r$ ,  $m < r$  について

$$F_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - \binom{n+r-2}{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor}, \quad (1.5)$$

$$L_n^{(r)} = \begin{cases} -2^{2m-1} + \frac{2r+1}{2} \binom{2m}{m} & (n = 2m) \\ 4^m & (n = 2m+1) \end{cases}. \quad (1.6)$$

前述の表と照らし合わせても、この系が成り立つことが観察できる。たとえば  $r \geq m$  のとき

$$F_{2m-1}^{(r+1)} = F_{2m}^{(r)} = \binom{2m+r-2}{m-1} - \binom{2m+r-2}{m-2}$$

(対称性) が成り立つ、といった事実もこの系からの帰結である。更によくよく観察すると、以下の不等式が成り立つことが期待される。

$$1 \leq F_1^{(r)} \leq F_2^{(r)} \leq F_3^{(r)} \leq F_4^{(r)} \leq \dots, \quad (1.7)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \leq & L_1^{(r)} & \leq & L_3^{(r)} & \leq & L_5^{(r)} & \leq & L_7^{(r)} & \leq & \dots \\ & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ r & \leq & L_2^{(r)} & \leq & L_4^{(r)} & \leq & L_6^{(r)} & \leq & L_8^{(r)} & \leq & \dots \end{array}, \quad (1.8)$$

$$1 \leq F_n^{(1)} \leq F_n^{(2)} \leq F_n^{(3)} \leq F_n^{(4)} \leq \dots, \quad (1.9)$$

$$1 \leq L_n^{(1)} \leq L_n^{(2)} \leq L_n^{(3)} \leq L_n^{(4)} \leq \dots. \quad (1.10)$$

たとえば  $r > 2n$  のときは、 $F_n^{(r)}$ ,  $L_n^{(r)}$  の明示公式 (1.5), (1.6) より不等式 (1.9), (1.10) が成り立つことがわかる。

本稿ではこれらの不等式を示す。特に不等式 (1.7), (1.8) は3年前の第14回日本フィボナッチ集会での発表以来度々言及してきた命題でもあるが、今回はこれらの不等式をより一般的な形で証明する。まず Section 2 で、主結果の証明に必要な対称関数及び cosine の等分値の性質について述べる。次いで Section 3 で不等式 (1.7), (1.8) を一般化した形で証明する。不等式 (1.9), (1.10) については部分的な結果について言及する。一般の場合については、第17回日本フィボナッチ協会研究集会の発表でも述べたように、不等式 (1.9), (1.10) についての証明は完了していない。そこで現段階での、まだ gap が残った形の不完全な“証明”を記すことにする。最後に Section 4 で、今回の不等式 (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) に関連したいくつかの問題を Future works として述べる。

## 2 Preliminaries

主結果の証明に必要となる対称関数及び cosine の等分値の性質について述べる. まず  $h_n^{(r)} := h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  と  $p_n^{(r)} := p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  の次の関係式を recall する.

**Lemma 2.1** ([M] (2.11)).

$$nh_n^{(r)} = \sum_{j=1}^n p_j^{(r)} h_{n-j}^{(r)}. \quad (2.1)$$

次いで cosine の等分値を

$$\beta_{j,r} := -2 \cos \left( \frac{2\pi j}{2r+1} \right), \quad \beta := (\beta_{1,r}, \dots, \beta_{r,r})$$

とおき, 必要となる基本性質を list する.

**Lemma 2.2.** (1)

$$\beta_{j,r} \begin{cases} < 0 & (j \in (1, \frac{2r+1}{4})) \\ \geq 0 & (j \notin (1, \frac{2r+1}{4})) \end{cases}. \quad (2.2)$$

(2)

$$\beta_{r,r} \geq |\beta_{1,r}| \geq \beta_{r-1,r} \geq |\beta_{2,r}| \geq \dots. \quad (2.3)$$

(3)

$$|\beta_{j,r}| \begin{cases} < 1 & (j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})) \\ \geq 1 & (j \notin (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})) \end{cases}. \quad (2.4)$$

(4)

$$p_2^{(r)}(\beta) = 2r - 1. \quad (2.5)$$

(5)

$$p_3^{(r)}(\beta) = \begin{cases} 4 & (r \neq 1) \\ 1 & (r = 1) \end{cases}. \quad (2.6)$$

(6)

$$p_1^{(r)}(\beta) = 1. \quad (2.7)$$

(7)

$$\beta_{r+1,r+1} \geq \beta_{r,r} \geq \beta_{r,r+1} \geq \beta_{r-1,r} \geq \dots \geq \beta_{2,r} \geq \beta_{2,r+1} \geq \beta_{1,r} \geq \beta_{1,r+1}. \quad (2.8)$$

ここで (2.2), (2.3), (2.4), (2.8) は高校数学, (2.5), (2.6), (2.7) は  $L_n^{(r)}$  の明示公式 (1.4) より従う.

### 3 Main results

まず最初に完全斉次対称多項式  $h_n^{(r)} := h_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  の単調性をベキ和対称多項式  $p_n^{(r)} := p_n^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$  の単調性に帰着させる次の補題を示す.

**Lemma 3.1.** (1) ベキ和対称多項式  $\{p_n^{(r)}\}_{n \geq 0}$  が実数, かつ任意の正の整数  $r$  と非負整数  $m$  について

$$1 \leq p_{2m+1}^{(r)} \leq p_{2m+3}^{(r)}, \quad (3.1)$$

$$p_{2m+1}^{(r)} \leq p_{2m+2}^{(r)}, \quad (3.2)$$

が成り立つならば, 任意の正の整数  $n, r$  について

$$1 \leq h_{n-1}^{(r)} \leq h_n^{(r)}. \quad (3.3)$$

(2) ベキ和対称多項式  $\{p_n^{(r)}\}_{n \geq 0}$  が実数, かつ任意の正の整数  $r$  と非負整数  $n$  について

$$1 \leq p_n^{(r)} \leq p_n^{(r+1)} \quad (3.4)$$

が成り立つならば, 任意の正の整数  $r$  と非負整数  $n$  について

$$1 \leq h_n^{(r)} \leq h_n^{(r+1)}. \quad (3.5)$$

*Proof.* (1) 次数  $n$  についての帰納法で示す. まず  $n = 1$  のときは (3.1) より

$$h_1^{(r)} - h_0^{(r)} = p_1^{(r)} - 1 \geq 0.$$

次いで次数  $n$  以下について (3.3) が成り立つと仮定する. ここでベキ和対称多項式と完全斉次対称多項式の関係式 (2.1) を用い

$$\begin{aligned} (n+1)(h_{n+1}^{(r)} - h_n^{(r)}) &= -h_n^{(r)} + \sum_{j=1}^{n+1} p_j^{(r)} h_{n+1-j}^{(r)} - \sum_{j=1}^n p_j^{(r)} h_{n-j}^{(r)} \\ &= (p_1^{(r)} - 1)h_n^{(r)} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{(p_{2k}^{(r)} - p_{2k-1}^{(r)})h_{n-2k+1}^{(r)} + (p_{2k+1}^{(r)} - p_{2k}^{(r)})h_{n-2k}^{(r)}\} \\ &\quad + \frac{1 - (-1)^n}{2} (p_{n+1}^{(r)} - p_n^{(r)}). \end{aligned}$$

と変形する. ここでベキ和についての仮定 (3.1), (3.2) と帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned} (p_1^{(r)} - 1)h_n^{(r)} &\geq 0, \\ (p_{2k}^{(r)} - p_{2k-1}^{(r)})h_{n-2k+1}^{(r)} + (p_{2k+1}^{(r)} - p_{2k}^{(r)})h_{n-2k}^{(r)} &\geq \{(p_{2k}^{(r)} - p_{2k-1}^{(r)}) + (p_{2k+1}^{(r)} - p_{2k}^{(r)})\}h_{n-2k}^{(r)} \\ &= (p_{2k+1}^{(r)} - p_{2k-1}^{(r)})h_{n-2k}^{(r)} \\ &\geq 0, \\ \frac{1 - (-1)^n}{2} (p_{n+1}^{(r)} - p_n^{(r)}) &\geq 0 \end{aligned}$$

となるので  $h_{n+1}^{(r)} - h_n^{(r)} \geq 0$  が成り立つ。

(2) まず  $n = 0$  の場合は, 任意の  $r$  について  $h_0^{(r)} = 1$  が成り立つので

$$h_0^{(r+1)} - h_0^{(r)} = 1 - 1 = 0.$$

次いで次数  $n$  未満について (3.5) が成り立つと仮定する. 再びベキ和対称多項式と完全斉次対称多項式の関係式 (2.1), ベキ和についての仮定 (3.4) 及び帰納法の仮定 (3.5) より

$$\begin{aligned} n(h_n^{(r+1)} - h_n^{(r)}) &= \sum_{j=1}^n (p_j^{(r+1)} h_{n-j}^{(r+1)} - p_j^{(r)} h_{n-j}^{(r)}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n p_j^{(r)} (h_{n-j}^{(r+1)} - h_{n-j}^{(r)}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

よって  $h_n^{(r+1)} \geq h_n^{(r)}$ . □

次が本稿の主結果にあたる, 不等式 (1.8) の一般化である.

**Theorem 3.2.**  $r$  個の実数の組  $\alpha := (\alpha_{1,r}, \dots, \alpha_{r,r}) \in \mathbb{R}^r$  が以下の 5 条件を満たすとする.

(1)

$$\alpha_{j,r} \begin{cases} < 0 & (j \in (1, \frac{2r+1}{4})) \\ \geq 0 & (j \notin (1, \frac{2r+1}{4})) \end{cases}, \quad (3.6)$$

(2)

$$\alpha_{r,r} \geq |\alpha_{1,r}| \geq \alpha_{r-1,r} \geq |\alpha_{2,r}| \geq \dots, \quad (3.7)$$

(3)

$$|\alpha_{j,r}| \begin{cases} < 1 & (j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})) \\ \geq 1 & (j \notin (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})) \end{cases}, \quad (3.8)$$

(4)

$$p_2^{(r)}(\alpha) \geq r, \quad (3.9)$$

(5)

$$p_3^{(r)}(\alpha) - p_1^{(r)}(\alpha) \geq \frac{16\sqrt{3}}{27} = 1.0264004785 \dots. \quad (3.10)$$

このとき, 任意の正の整数  $r$  と  $m$  について次の不等式が成り立つ.

$$p_{2m}^{(r)}(\alpha) \geq p_{2m-2}^{(r)}(\alpha), \quad (3.11)$$

$$p_{2m}^{(r)}(\alpha) \geq p_{2m-1}^{(r)}(\alpha), \quad (3.12)$$

$$p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) \geq p_{2m-1}^{(r)}(\alpha). \quad (3.13)$$

更に  $\alpha = (\alpha_{1,r}, \dots, \alpha_{r,r})$  が次の条件を満たすとする.

(6)

$$p_1^{(r)}(\alpha) \geq 1. \quad (3.14)$$

このとき, 任意の正の整数  $r$  と  $n$  について次の不等式が成り立つ.

$$1 \leq h_{n-1}^{(r)}(\alpha) \leq h_n^{(r)}(\alpha). \quad (3.15)$$

*Proof.* まず (3.11) を示す. これは簡単で, 条件 (3.8), (3.9) より

$$\begin{aligned} p_{2m}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-2}^{(r)}(\alpha) &= \sum_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} (\alpha_{j,r}^2 - 1) \alpha_{j,r}^{2m-2} + \sum_{j \notin (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} (\alpha_{j,r}^2 - 1) \alpha_{j,r}^{2m-2} \\ &\geq \sum_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} (\alpha_{j,r}^2 - 1) + \sum_{j \notin (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} (\alpha_{j,r}^2 - 1) \\ &= p_2^{(r)}(\alpha) - r \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

同様に (3.12) は条件 (3.6), (3.7), (3.8) より

$$\begin{aligned} p_{2m}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha) &= \sum_{j=1}^r \alpha_{j,r}^{2m} - \sum_{j \in (1, \frac{2r+1}{4})} \alpha_{j,r}^{2m-1} - \sum_{j \notin (1, \frac{2r+1}{4})} \alpha_{j,r}^{2m-1} \\ &\geq \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{j,r}^{2m} + (\alpha_{r,r}^{2m} - \alpha_{r,r}^{2m-1}) \\ &\quad + \frac{1 + (-1)^r}{2} \alpha_{[\frac{r}{2}, r]}^{2m-1} - \sum_{j \in (1, \frac{2r+1}{4})} (\alpha_{j,r}^{2m-1} + \alpha_{r-j,r}^{2m-1}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

最後に一番難しい不等式 (3.13) を示す. まず  $r = 1$  の場合は条件 (3.6), (3.8) と (3.9) より

$$0 \leq \alpha_{1,1} \leq 1, \quad \alpha_{1,1}^2 - 1 \geq 0,$$

ゆえ  $\alpha_{1,1} = 1$ , つまり  $p_n^{(r)}(\alpha) = 1$  を得る. よって  $r = 1$  の場合は (3.13) が成り立つ. 同様に  $r = 2$  の場合も条件 (3.6), (3.7), (3.8) より

$$-1 < \alpha_{1,2} < 0 < 1 < \alpha_{2,2},$$

となるので成り立つ.

以下  $r \geq 3$  とする. まず  $m = 1$  の場合は条件 (3.10) より成り立つので,  $m \geq 2$  とする. ここで

$$F(t, m) := (t^2 - 1)t^{2m-1},$$

$$f(t, m) := F'(t, m) = (2m + 1)t^{2m} - (2m - 1)t^{2m-2} = ((2m + 1)t^2 - (2m - 1))t^{2m-2}.$$

とおく. この函数  $F(t, m)$  の増減表は以下の通りである.

$t$	0	...	$\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}$	...	1	...
$F'$	0	-	0	+	2	+
$F$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{2m+1} \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)^{m+\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

証明の大まかな方針は

1.  $p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha)$  を絶対値 1 以上の和と 1 未満の和に分け, それぞれを  $f(t, m)$  の積分 (面積) で書き直す.
2. 絶対値 1 以上の和は正 (条件 (3.7), (3.8) よりこれは必ず正となる), 絶対値 1 未満の和は負とみなし, それぞれを積分で評価する.
3. 次数に関する reduction を行い, 積分の評価を  $m = 1$  の場合に帰着させる.

といった形になる. そこでまず  $p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha)$  を条件 (3.8) に基づいて

$$\begin{aligned} p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha) &= \sum_{j=1}^r F(\alpha_{j,r}, m) \\ &= \sum_{j \notin \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, m) + \sum_{j \in \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, m), \end{aligned}$$

のように絶対値 1 以上の和と 1 未満の和に分ける. ここで絶対値が 1 以上の和の方を, 条件 (3.6) と条件 (3.7) に注意して, 積分を用いて

$$\sum_{j \notin \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, m) = \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r}^m + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, m) dt \geq 0$$

と書き直す. これは積分領域が 1 以上であることに注意すると,

$$\sum_{j \notin \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, m) \geq \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r}^m + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt \geq 0 \quad (3.16)$$

と評価できる。

次に絶対値が1未満の和の方を考える。まず  $\{\alpha_{j,r}\}_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})}$  は

$$\begin{aligned} \{\gamma_{j,r}^{(+)}\}_{j=1,\dots, \lfloor \frac{r+1}{3} \rfloor} &= \{\alpha_{j,r}\}_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} \\ \text{s.t. } \gamma_{2m-1,r}^{(+)} &> 0, \gamma_{2m,r}^{(+)} < 0, 1 > \gamma_{2m-1,r}^{(+)} > |\gamma_{2m,r}^{(+)}| > \gamma_{2m+1,r}^{(+)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

もしくは

$$\begin{aligned} \{\gamma_{j,r}^{(-)}\}_{j=1,\dots, \lfloor \frac{r+1}{3} \rfloor} &= \{\alpha_{j,r}\}_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} \\ \text{s.t. } \gamma_{2m-1,r}^{(-)} &< 0, \gamma_{2m,r}^{(-)} > 0, 1 > |\gamma_{2m-1,r}^{(-)}| > \gamma_{2m,r}^{(-)} > |\gamma_{2m+1,r}^{(-)}| \end{aligned} \quad (3.18)$$

のいずれかであり, 積分も

$$\begin{aligned} \sum_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} F(\alpha_{j,r}, m) &= \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{r+1}{3} \rfloor}}{2} \int_0^{\gamma_{\lfloor \frac{r+1}{3} \rfloor, r}^{(+)}} f(t, m) dt \\ &+ \sum_{j \in [1, \frac{r+1}{6}]} \int_{|\gamma_{2j,r}^{(+)}|}^{\gamma_{2j-1,r}^{(+)}} f(t, m) dt, \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \sum_{j \in (\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3})} F(\alpha_{j,r}, m) &= \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{r+1}{3} \rfloor}}{2} \int_0^{\gamma_{1,r}^{(-)}} f(t, m) dt \\ &+ \sum_{j \in [1, \frac{r+1}{6}]} \int_{|\gamma_{2j+1,r}^{(-)}|}^{\gamma_{2j,r}^{(-)}} f(t, m) dt, \end{aligned}$$

と書き直せることに注意する。一般に

$$I_j \subset (0, 1) \text{ s.t. } I = \bigsqcup_j I_j$$

について,

$$\sum_j \int_{I_j} f(t, m) \geq \left( \int_0^{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}} - \int_{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}}^1 \right) f(t, m) dt = -\frac{4}{2m+1} \left( \frac{2m-1}{2m+1} \right)^{m+\frac{1}{2}}$$

が成り立つことに注意すると, 上記の2つの積分はいずれも

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, m) &\geq 2 \left( \int_0^{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}} - \int_{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}}^1 \right) f(t, m) dt \\
&= -2 \frac{4}{2m+1} \left( \frac{2m-1}{2m+1} \right)^{m+\frac{1}{2}} \\
&\geq -\frac{8\sqrt{3}}{27}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

のように評価できる. この (3.16), (3.19) より

$$p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha) \geq \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt - \frac{8\sqrt{3}}{27}. \tag{3.20}$$

ここで条件 (3.10) より

$$\begin{aligned}
\frac{16\sqrt{3}}{27} &\leq p_3^{(r)}(\alpha) - p_1^{(r)}(\alpha) \\
&= \sum_{j \notin \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, 1) + \sum_{j \in \left(\frac{2r+1}{6}, \frac{2r+1}{3}\right)} F(\alpha_{j,r}, 1) \\
&\leq \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt \\
&\quad - 2 \left( \int_0^{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}} - \int_{\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}}}^1 \right) f(t, m) dt \\
&= \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt + \frac{8\sqrt{3}}{27}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt \geq \frac{16\sqrt{3}}{27} - \frac{8\sqrt{3}}{27} = \frac{8\sqrt{3}}{27}. \tag{3.21}$$

よって (3.20), (3.21) より

$$\begin{aligned}
p_{2m+1}^{(r)}(\alpha) - p_{2m-1}^{(r)}(\alpha) &\geq \frac{1 - (-1)^{\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor}}{2} \alpha_{\lfloor \frac{4r-1}{6} \rfloor, r} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2r+1}{6} \rfloor} \int_{|\alpha_{j,r}|}^{\alpha_{r+1-j,r}} f(t, 1) dt - \frac{8\sqrt{3}}{27} \\
&\geq \frac{8\sqrt{3}}{27} - \frac{8\sqrt{3}}{27} \\
&= 0.
\end{aligned}$$



最後に条件 (3.14), (3.12), (3.13) と Lemma 3.1 より 2 つめの主結果 (3.15) を得る.  $\square$

この Theorem 3.2 と Lemma 2.2 より不等式 (1.8), そして不等式 (1.7) が直ちに従う.

**Theorem 3.3.** 任意の正の整数  $m$  と  $r$  に対して,

$$L_{2m}^{(r+1)} \geq L_{2m}^{(r)}, \quad (3.22)$$

$$L_{2m-1}^{(r+1)} \geq L_{2m-1}^{(r)}. \quad (3.23)$$

*Proof.* 不等式 (3.22) は条件 (2.2), (2.4), (2.8) より直ちに従うので, 不等式 (3.23) を示す (が前述のように現段階ではこの証明には gap があり不完全である). まず  $m < r$  のとき,

$$L_n^{(r)} = \begin{cases} -2^{2m-1} + \frac{2r+1}{2} \binom{2m}{m} & (n = 2m) \\ 4^m & (n = 2m + 1) \end{cases}.$$

これより特に  $m < r$  なる任意の正の整数  $m, r$  について

$$L_{2m+1}^{(r+1)} - L_{2m+1}^{(r)} = 0.$$

$r \leq m \leq 3r$  のとき

$$L_{2m+1}^{(r)} = 4^m - (2r + 1) \binom{2m+1}{m-r}.$$

よって特に  $r < m < 3r$  なる任意の正の整数  $m, r$  について

$$L_{2m+1}^{(r+1)} - L_{2m+1}^{(r)} \geq 1. \quad (3.24)$$

$3r \leq m$  に関しては, 二項係数の表示式 (1.4) ではなく, 定義式 (指数和) に戻って「key となる不等式」(ここに gap がある)

$$L_{2m+1}^{(r+1)} - L_{2m+1}^{(r)} \geq L_{6r-1}^{(r+1)} - L_{6r-1}^{(r)} - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

を示し, これより特に

$$L_{2m+1}^{(r+1)} - L_{2m+1}^{(r)} \geq \frac{1}{2} \geq 0$$

を得る.  $\square$

先の不等式 (3.13) の証明と同様,

『低次の不等式 (3.24) への reduction を与える「key となる不等式」(3.25) を考える』

というのが証明の基本方針である. これは数値計算的にも直感的にも成り立つことは確からしいが, 厳密に証明できていない. 先の不等式 (3.13) の証明のように絶対値 1 以上と 1 未満の和に分割してうまく積分評価に持ち込むという方針なのだが, 積分の参照点の  $\left\{-2 \cos\left(\frac{2\pi j}{2r+1}\right)\right\}_{j,r}$  (特に正側と負側の leading terms の差の) 分布がかなり微妙で現段階ではこの道からの踏破には成功していない.

## 4 Concluding remarks

いくつかの未解決問題について述べる. まず何より不等式 (1.10) の証明を完遂することである. ただし, 現段階では本稿の方針のまま完遂できるか, 全く別の方針が必要になるかも不明である. あるいは本稿のように不等式 (1.10) を介することなく, 不等式 (1.9) を直接証明するという方向も考えられる. その証明の方針としては, たとえば二項係数による明示公式 (1.3) からアプローチすれば良いように思う (これは cosine abelucas 数についても同様である). 実際,  $r$  が十分大きい時の単調性はこれらの公式から従ったので悪く無い方針かもしれない. しかし,  $n$  が大きくなるにつれ和の項の数が増え, 挙動が leading term のみでは決まらなくなってくるという困難があり, やはり証明には至っていない.

次に不等式 (1.7), (1.8) の精密化が挙げられる. 実際, 数値表の観察から容易に推察できるように,  $r = 1$  や  $n = 1$  といった例外的な zone を除いて, 殆どが (等号付きでない) 真の不等号であることがわかる. 更に不等式 (1.8) に関してより精密に,  $r > 1$  のとき次数  $n$  が小さいところだと交代性

$$r = L_0^{(r)} > L_1^{(r)} < L_2^{(r)} > L_3^{(r)} < L_4^{(r)} > \dots, \quad (4.1)$$

次数  $n$  が十分大きいところでは単調性

$$L_n^{(r)} < L_{n+1}^{(r)} < L_{n+2}^{(r)} < \dots \quad (4.2)$$

がそれぞれ成り立つことが観察される. より精密には, 不等式 (4.1) と (4.2) の間には明確な境界が存在すること, すなわち, ある非負整数  $n$  があって

$$r = L_0^{(r)} > L_1^{(r)} < L_2^{(r)} > \dots < L_{n-1}^{(r)} > L_n^{(r)} < L_{n+1}^{(r)} < L_{n+2}^{(r)} < \dots \quad (4.3)$$

が成り立つことも予想される. しかし, この  $n$  に関しての正確な値は見当もつかない. 現段階で言えるのは,

『 $n$  についての階差をとると等差的なので,  $r$  の 2 次 order になるであろう』

ということだが, 直感的にもよくわからず, どの程度の難易度の問題なのかも不明である.

$r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$n$	1	3	5	9	11	15	21	25	31	37	43	51	59	67	77	87	97	107	119	131

表 3: (4.3) の  $n$

## 参考文献

- [M] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.

# 双子素数予想とスーパー双子素数予想

梶田光 (小学5年生)

## 1 双子素数予想

最初に,  $x$  までの素数の個数を求める関数を素数計数関数といい,  $\pi(x)$  で表す.  
 $x$  が素数であるかどうかを求める関数を考える. この場合,  $\pi(x) - \pi(x-1)$  が使用できる.  
なぜなら,  
 $x$  が素数のとき, 素数計数関数の  $x$  での増加量は 1 なので,  $\pi(x)$  と  $\pi(x-1)$  の差が 1,  
つまり  $\pi(x) - \pi(x-1) = 1$  となるが,  
 $x$  が素数でないとき, 素数計数関数の  $x$  での増加量は 0 なので,  $\pi(x)$  と  $\pi(x-1)$  の差が 0,  
つまり  $\pi(x) - \pi(x-1) = 0$  となる. したがって,

$$\pi(x) - \pi(x-1) = \begin{cases} 1 & (x \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

前式より,  $x+2$  が素数かどうかを求める関数は  $\pi(x+2) - \pi(x+1)$  である.

$$\pi(x+2) - \pi(x+1) = \begin{cases} 1 & (x+2 \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

次に,  $x$  が素数かつ  $x+2$  が素数である (つまり  $x$  が双子素数の弟) かどうかを求める関数は

$(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1))$  である. なぜなら,  
まず  $\pi(x) - \pi(x-1) = a$ ,  $\pi(x+2) - \pi(x+1) = b$ ,  $(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1)) = c$   
とおくと,  $a \cdot b = c$  である. ここで,

$x$  が素数かつ  $x+2$  が素数のとき,  $a = 1$ ,  $b = 1$  なので,  $c = 1 \cdot 1 = 1$

$x$  が素数かつ  $x+2$  が素数でないとき,  $a = 1$ ,  $b = 0$  なので,  $c = 1 \cdot 0 = 0$

$x$  が素数でない, かつ  $x+2$  が素数のとき,  $a = 0$ ,  $b = 1$  なので,  $c = 0 \cdot 1 = 0$

$x$  と  $x+2$  が両方素数でないとき,  $a = 0$ ,  $b = 0$  なので,  $c = 0 \cdot 0 = 0$  よって,

$$(\pi(x) - \pi(x-1))(\pi(x+2) - \pi(x+1)) = \begin{cases} 1 & (x \in \text{prime and } x+2 \in \text{prime}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

よって,  $x$  以下の双子素数の弟の数は,

$$\sum_{n=2}^x (\pi(n) - \pi(n-1))(\pi(n+2) - \pi(n+1)) \quad (1)$$

ここで、双子素数予想は、双子素数の組は無限にある、つまり前式が発散する事と同値である。

## 2 スーパー双子素数予想

(1) 式をスーパー双子素数にも応用することができる。

ここで、スーパー双子素数とは、T条件(高橋条件)、つまり  $\gcd(a, b) = 1$  かつ  $a + b \equiv 1 \pmod{2}$  を満たす  $a, b$  について、

$p \in \text{prime}$  かつ  $q = ap + b \in \text{prime}$  となるような  $p, q$  である。

スーパー双子素数予想とは、T条件を満たす  $a, b$  について、このような  $p, q$  が無限に存在するという予想である。

まず、 $p$  が素数かどうかは、前述のように、 $\pi(p) - \pi(p - 1)$  で計算できる。

つぎに、 $q = ap + b$  が素数かどうかは、 $\pi(ap + b) - \pi(ap + b - 1)$  で求められる。

よって、 $x$  以下のスーパー双子素数の弟の数は、

$$\sum_{n=2}^x (\pi(n) - \pi(n - 1)) (\pi(an + b) - \pi(an + b - 1))$$

ここで、スーパー双子素数予想は、スーパー双子素数の組は無限にある、つまり前式が発散する事と同値である。

# 不等式 $\sigma(a) + \varphi(a) \geq 2a$ の研究

土屋 知人 \*

2019 年 9 月 23 日

## 1 はじめに.

自然数  $a > 1$  に対して, ユークリッド関数  $\sigma(a)$ , オイラー関数  $\varphi(a)$  は,  $a$  の約数  $d_i$  を用いて,  $\sigma(a) = \sum_{d_i|a} d_i, a = \sum_{d_i|a} \varphi(d_i)$  (ガウスの公式)<sup>1</sup> となる.

さらに,  $\sigma(a) = 1 + a + \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} d_i$  により,  $\sigma(a) - a = 1 + \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} d_i$ .  
 $a = 1 + \varphi(a) + \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} \varphi(d_i)$  により,  $\varphi(a) - a = -1 - \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} \varphi(d_i)$ .

よって,

$\sigma(a) - a = 1 + \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} d_i$  と  $\varphi(a) - a = -1 - \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} \varphi(d_i)$  を加えて,  
 $\Phi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a$  と定義すると,

$$\Phi(a) = \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} (d_i - \varphi(d_i)) \quad (1)$$

と表せる.

$1 < d_i < a$  について,

$$\sigma(d_i) \geq d_i + 1, d_i - 1 \geq \varphi(d_i), \varphi(1) = 1 \quad (2)$$

である. ここで, 等号  $\sigma(d_i) = d_i + 1$  が成り立つのは,  $d_i$  が素数に限る. また,  $d_i - 1 = \varphi(d_i)$  も  $d_i$  が素数に限る.

$\Phi(a) = (d_i - \varphi(d_i)) \geq \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} 1$  で,  $a$  が合成数ならば,  $\Phi(a) > 0$  となることが分かる. 故に, 次の命題が成り立つ.

**命題 1**  $\sigma(a) + \varphi(a) \geq 2a$  但し, 等号は  $a$  が素数のときに限る.

(証明)

(1) より

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = \sum_{1 < d_i < a, d_i|a} (d_i - \varphi(d_i))$$

となる. もし,  $a$  が素数でなければ,  $a \neq d_i \neq 1$  となる  $d_i$  があって,  $d_i - 1 \geq \varphi(d_i)$  であるから,

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a > 0$$

---

\*多摩毎日カルチャー

<sup>1</sup>『数学の研究をはじめよう (1)』飯高茂, 現代数学社, 2016 年 5 月

で,  $a$  が素数ならば,

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = 0$$

となる. 故に, (3) 式  $\sigma(a) + \varphi(a) \geq 2a$  が成り立つ. ただし, 等号は  $a$  が素数の場合である. (終)

系 1

$$\sigma(a) + \varphi(a) = 2a + 1 \quad (3)$$

は,  $a = p^2$  ( $p$  は素数) をもつ.

$$\sigma(a) + \varphi(a) = 2a + 2 \quad (4)$$

は,  $a = pq$  ( $p, q$  は素数) をもつ.

(証明)

(3) を満たす  $a$  は, (1) より,

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = \sum_{d_i \neq a, d_i \neq 1, d_i | a} (d_i - \varphi(d_i)) = 1$$

従って,  $d_i - 1 \geq \varphi(d_i)$  より

$$d_i - \varphi(d_i) = 1$$

となる  $a$  の真の約数  $d_i$  が 1 つ存在する. よって,  $a$  の約数は 3 つだけなので, 素数  $p$  の 2 乗 ( $p^2$ ) である. 同様に,  $a$  の真の約数  $d_i, d_j, (d_i \neq d_j)$  に対し,

$$d_i - \varphi(d_i) + d_j - \varphi(d_j) \geq 2 \quad (5)$$

である. 一般に,  $a = \prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$ , 素数  $p_i \neq p_j$  のとき,  $a$  の約数の個数  $\sigma_0(a)$  は,  $\prod_{i=1}^s (e_i + 1)$  で与えられるから,  $a$  が真の約数を 2 つだけもつ場合は,  $a = p_1 p_2$ , および  $a = p_1^3$  の 2 通りである. 従って (5) の等号が成り立つためには 2 つの真の約数が素数でなければならないから,  $a = pq$  ( $p, q$  は素数) の場合に限る,

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = 2$$

が成り立つ. (終)

## 2 $\Phi(a) = m$ となる最大の $a$ .

次に,  $50 \geq m \geq 3$  に対して,  $\Phi(a) = m$  となる  $a$  を求めた. このとき,  $a$  の約数の個数  $\sigma_0(a)$  は 10 以下となった. そこで, 計算した結果を  $\sigma_0(a)$  値の順に並べて, 表 1, 2<sup>3</sup> に示す. これをみると, 素数  $p$  に対して,  $\Phi(p^3) = m$  となる  $m$  は  $p$  と  $m = p + 1$  の関係が成り立ち, さらに,  $\Phi(a) = m$  となる  $a$  のうちで  $p^3$  は最大になっている. よって, 次の予想を導く.

予想

自然数  $a$  が,  $\Phi(a) = m$  となる  $m$  に対して,  $p = m - 1$  が素数なら, これらの  $a$  の中で  $p^3$  が最大である.

---

<sup>2</sup>( $a$  の真の約数とは, 1 と  $a$  以外の  $a$  の約数)  
<sup>3</sup>次ページ

### 3 最後に.

本文の作成にあたり、「多摩毎日カルチャー」にて飯高茂先生に課題設定をはじめ、多くのご指導ご助言を頂きました。ここに深く謝意を表すものであります。

表 1:  $\Phi(a) = m$  となる  $a$  の表 ( $d = \sigma_0(a)$  とした.)

	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 6$	$d = 7$
$m$	$p^3$	$p^4$	$p_1^2 p_2$	$p^5$	$p^6$
3	$2^3$				
4	$3^3$				
6	$5^3$				
7		$2^4$			
8	$7^3$		$2^2 3$		
9			$3^2 2$		
10			$2^2 5$		
12	$11^3$		$3^2 5, 2^2 7$		
13		$3^4$	$5^2 2$		
14	$13^3$		$5^2 3, 3^2 7$		
15				$2^5$	
16			$2^2 11$		
18	$17^3$		$7^2 3, 5^2 7, 3^2 11, 2^2 13$		
20	$19^3$		$7^2 5, 3^2 13$		
22			$5^2 11, 2^2 17$		
24	$23^3$		$5^2 13, 3^2 17, 2^2 19$		
25			$11^2 2$		
26		$5^4$	$11^2 2, 7^2 11, 3^2 19$		
28			$11^2 5, 7^2 13, 5^2 17, 2^2 23$		
29			$13^2 2$		
30	$29^3$		$13^2 13, 11^2 7, 5^2 19, 3^2 23$		
31					$2^6$
32	$31^3$		$13^2 5, 7^2 17$		
34			$13^2 7, 7^2 19, 5^2 23, 2^2 29$		
36			$11^2 13, 3^2 29, 2^2 31$		
37			$17^2 2$		
38	$37^3$		$17^2 3, 13^2 11, 7^2 23, 3^2 31$		
40			$17^2 5, 11^2 17, 5^2 29$	$3^5$	
41			$19^2 2$		
42	$41^3$		$19^2 3, 17^2 7, 11^2 19, 5^2 31, 2^2 37$		
44	$43^3$		$19^2 5, 13^2 17, 7^2 29, 3^2 37$		
46			$19^2 7, 17^2 11, 13^2 19, 11^2 23, 7^2 31, 2^2 41$		
48	$47^3$		$17^2 13, 5^2 37, 3^2 41, 2^2 43$		
49			$23^2 2$		
50			$23^2 3, 19^2 11, 13^2 23, 3^2 43$		

(注) 但し,  $\sigma_0(a) = 4$  の場合,  $a = p_1 p_2, a = p_1^3$  ( $p_1, p_2$  は素数) の 2 通りあるが,  
 $a = p_1 p_2$  の場合, 既に述べたので表 1 から除いた.



表 2:  $\Phi(a) = m$  となる  $a$  の表 ( $d = \sigma_0(a)$  とした.)

	$d = 8$	$d = 8$	$d = 9$	$d = 10$
$m$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1^3 p_2$	$p_1^2 p_2^2$	$p_1^4 p_2$
20	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 3$		
24	$2 \cdot 3 \cdot 7$			
26		$2^3 5$		
28	$2 \cdot 5 \cdot 7$			
30	$3 \cdot 5 \cdot 7$	$3^3 2$		
31			$2^2 3^2$	
32	$2 \cdot 3 \cdot 11$	$2^3 7$		
36	$2 \cdot 5 \cdot 11, 2 \cdot 3 \cdot 13$			
40	$2 \cdot 7 \cdot 11, 2 \cdot 5 \cdot 13$			
42	$3 \cdot 5 \cdot 13, 3 \cdot 7 \cdot 11$			
44	$2 \cdot 7 \cdot 13, 2 \cdot 3 \cdot 17$	$2^3 11$		$2^4 3$
48	$2 \cdot 5 \cdot 17, 2 \cdot 3 \cdot 19$			
50	$5 \cdot 7 \cdot 13, 3 \cdot 5 \cdot 17$	$3^3 7, 2^3 13$		

(注) 但し,  $\sigma_0(a) = 8, \sigma_0(a) = 9, \sigma_0(a) = 10$  の場合,  $\Phi(a) = m$  となる  $a = p^7, a = p^8, a = p^9$  は,  $50 \geq m \geq 3$  の範囲で存在しないため, この項目を表 2 から除いた.

# オイラー型メルセンヌ完全数について

宮本憲一

平成 31 年 9 月 25 日

与えられた  $m$  に対し以下のような式を満たすような  $a$  を  $m$  だけ平行移動したオイラー型メルセンヌ完全数、 $A$  をそのパートナーいう。

$$A = \varphi(a) - m + 1, 2\varphi(A) = a - m$$

となるような解  $a$  と  $A$  を研究する。

**定理 1**  $A$  が偶数のとき  $A$  が 2 べきになり  $a$  が素数となり  $a = 2^e + m$  とかける。(ただし  $m$  は奇数,  $a > 2$ )

Proof

$$2\varphi(A) - A = a - \varphi(a) - 1 \geq (a - 1) - (a - 1) = 0$$

ここで  $A$  は偶数より

$$A = 2^e L \text{ (ただし, } L \text{ は奇数で } L > 2),$$

$$2\varphi(2^e L) - 2^e L = 2^e \varphi(L) - 2^e L = 2^e (\varphi(L) - L) < 0,$$

よって矛盾したがって、 $L = 1$  より  $A = 2^e$  よって  $A = 2^e$ ,

$$\text{したがって } a - m = 2\varphi(A) = A = \varphi(a) - m + 1$$

$$a = \varphi(a) + 1 \text{ なので}$$

$$\varphi(a) = a - 1 \text{ より } a \text{ は素数かつ } a = 2^e + m$$

また  $m$  は奇数となる。

以下

$a = 2^e + m$  で  $m$  に対して  $e$  がどの値をとるとき  $a$  が素数になるか調べる

$e$	$a = 2^e - 1$	$e$	$a = 2^e + 1$
2	3	1	3
3	7	2	5
5	31	4	17
7	127	8	257
13	8191	16	65537
17	131071		
19	524287		
31	2147483647		

$e$	$a = 2^e + 3$	$e$	$a = 2^e + 5$
1	5	1	7
2	7	3	13
3	11	5	37
4	19	11	2053
6	67		
7	131		
12	4099		
15	32771		
16	65539		
18	262147		
28	268435459		
30	1073741827		

$e$	$a = 2^e + 7$	$e$	$a = 2^e + 9$
2	11	1	11
4	23	2	13
6	71	3	17
8	263	5	41
10	1031	6	73
16	65543	7	137
18	262151	9	521
		10	1033

$m = 0$  のとき、

$$A = \varphi(a) + 1$$

$$2\varphi(A) = a$$

のとき  $a = 2^e L$  (奇数) とする

$$2\varphi(A) = 2^e L \text{ より,}$$

$$\varphi(A) = 2^{e-1} L, A = 2^{e-1} \varphi(L) + 1 \text{ となる}$$

$$\varphi(A) - A = 2^{e-1} (L - \varphi(L)) - 1 < 0.$$

$$0 \leq 2^{e-1} (L - \varphi(L)) < 1 \text{ よって } e = 1 \text{ のとき } 0 \leq L - \varphi(L) < 1$$

よって  $L = 1$  から

$$a = 2^e, \text{ かつ } A = \varphi(2^e) + 1$$

$$\varphi(A) = 2^{e-1},$$

$$\text{より } A = 2^{e-1} + 1 \text{ かつ } \varphi(A) = 2^{e-1} = A - 1$$

より  $A = 2$  または  $A$  はフェルマー素数.

$A = \varphi(a) - m + 1, a \geq 3$  とすると  $\varphi(a)$  は偶数なので

$A$  が奇数なら以下  $m$  は偶数で負のとき調べる。

1.  $m = -2$  のとき

$$A = \varphi(a) + 3$$

$$2\varphi(A) = a + 2$$

$$2\varphi(A) - 2A = a - 2\varphi(a) - 4$$

$a$  は偶数より  $a = 2^e L$  とすると

$$\varphi(A) - A = 2^{e-1} L - \varphi(2^e L) - 2 = 2^{e-1} (L - \varphi(L)) - 2 < 0$$

$$0 < 2^{e-1} (L - \varphi(L)) < 2 \text{ よって } 2^{e-1} (L - \varphi(L)) = 1$$

以上より  $e = 1, L - \varphi(L) = 1$  つまり  $L$  は素数で  $L = q$  とおけば

$$a = 2q, A = (q - 1) + 3 = q + 2$$

$$2\varphi(q + 2) = 2q + 2 \text{ よって } \varphi(q + 2) = q + 1$$

したがって  $q + 2$  は素数で  $p = q + 2$  とすれば  $(p, q)$  は双子素数

$a$	$A$
2	$2^2$
$2*3$	5
$2*5$	7
$2*11$	13
$2*17$	19
$2*29$	31
$2*41$	43
$2*59$	61
$2*71$	73
$2*101$	103

2.  $m = -4$  のとき、定義式は

$$A = \varphi(a) + 5$$

$$2\varphi(A) = a + 4$$

$$\text{よって } 2\varphi(A) - 2A = a - 2\varphi(a) - 6$$

この式から  $a$  は偶数より

$$a = 2^e L (\text{ただし } L \text{ は奇数}) \text{ とすると, } 2\varphi(A) - 2A = 2^e L - 2\varphi(2^e L) - 6 \text{ から}$$

$$\varphi(A) - A = 2^{e-1} L - \varphi(2^e L) - 3 < 0 \text{ になるから}$$

$$0 < 2^{e-1}(L - \varphi(L)) < 3 \text{ となる。}$$

$$e = 1 \text{ のとき } 0 < L - \varphi(L) < 3 \text{ より}$$

$$\text{よって } L - \varphi(L) = 1 \text{ または } L - \varphi(L) = 2 \text{ となる。}$$

ところが  $L - \varphi(L) = 2$  ならば  $L$  は偶数より矛盾

$$\text{よって } L - \varphi(L) = 1 \text{ より } L \text{ は素数}$$

$$a = 2L, L \text{ を素数として、定義式に代入すると}$$

$$A = \varphi(2L) + 5 = \varphi(L) + 5 = L - 1 + 5 = L + 4 \text{ より}$$

$$2\varphi(L + 4) = 2L + 4 \text{ よって } \varphi(L + 4) = L + 2 \text{ より } L \text{ は偶数より矛盾}$$

したがって  $e = 1$  でない。

以上より  $e = 2, L - \varphi(L) = 1, L$  は素数で  $L = q$  と書ける。

$$\text{ところで } A = \varphi(2^2 q) + 5 = 2(q - 1) + 5 = 2q + 3$$

$$\text{定式に代入すると } 2\varphi(2q + 3) = 4q + 4 \text{ より}$$

$$\varphi(2q + 3) = 2q + 2$$

よって  $2q + 3$  は素数、したがって  $p = 2q + 3$  とおくと  $(q, p = 2q + 3)$  よりスーパー双子素数になる。

$$a = 2^2 * q \text{ である。}$$

$a$	$A$
$2^3$	$3^2$
$2^2 * 5$	13
$2^2 * 7$	17
$2^2 * 13$	29
$2^2 * 17$	37
$2^2 * 19$	41
$2^2 * 29$	61
$2^2 * 43$	89
$2^2 * 47$	97
$2^2 * 53$	109

3.  $m = -6$  のとき定義式は

$$A = \varphi(a) + 7$$

$$2\varphi(A) = a + 6$$

となりそのとき解  $a$  と  $A$  は

$a$	$A$
2	$2^3$
$2*3$	$3^2$
$2*3^2$	13

4.  $m = -8$  のとき定義式は

$$A = \varphi(a) + 9, 2\varphi(A) = a + 8$$

この式から  $a = 2^e L$  と書ける。それを上の式代入すると

$$A = \varphi(2^e L) + 9$$

$$2\varphi(A) = 2^e L + 8$$

よって、 $2\varphi(A) - 2A = 2^e L - 2\varphi(2^e L) - 10$  より

$$\varphi(A) - A = 2^{e-1} L - \varphi(2^e L) - 5 < 0 \text{ から}$$

$$0 < 2^{e-1} L - 2^{e-1} \varphi(L) < 5$$

ここで  $e = 1$  のとき

$$0 < L - \varphi(L) < 5$$

よって  $L - \varphi(L) = 1$  または  $3$

したがって  $L$  は素数か  $L = 9$  であるが、定義式に代入しても成り立たない。

$$0 < 2^{e-1}(L - \varphi(L)) < 5$$

ここで  $e = 2$  のとき  $0 < 2(L - \varphi(L)) < 5$  とすると

$L - \varphi(L) = 1$  または  $L - \varphi(L) = 2$  となるが、 $L$  は奇数より

$L - \varphi(L) = 1$  で  $L$  は素数

よって  $a = 2^2 L$  となるが、定義式に代入しても成り立たない。

$$e = 3 \text{ とすると } 0 < 4(L - \varphi(L)) < 5$$

より  $L = q$  は素数。よって  $a = 2^3 q$  とすると、 $A = \varphi(2^3 q) + 9$  は  $A = 4\varphi(q) + 9$  よって

$$A = 4(q - 1) + 9$$

$A = 4q + 5$  よって  $A = p$  とすると  $(q, p = 4q + 5)$  なるスーパー双子素数がでてくる。

$a$	$A$
$2^3 * 3$	17
$2^5$	$5^2$
$2^3 * 17$	73
$2^3 * 23$	97
$2^3 * 47$	193
$2^3 * 59$	241
$2^3 * 83$	337
$2^3 * 101$	409
$2^3 * 107$	433
$2^3 * 113$	457
$2^3 * 149$	601
$2^3 * 167$	673
$2^3 * 191$	769
$2^3 * 233$	937

最後になるが押田輝将君に感謝する

以下の予想をする

$m$  が負の 2 のべきとなるときスパー双子素数が無限の存在する。

高橋君をはじめいつも私を励まして下さった飯高先生に深く謝辞を述べたい。

友愛数の平行移動 ,  
東京理科大学 2019/August 23th

飯高 茂

平成 31 年 8 月 31 日

目 次

<b>1</b>	<b>3 項完全数の問題</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>友愛数</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Euler の結果</b>	<b>8</b>
3.1	$\cos(B) = A$ , 梶田君の証明 . . . . .	9
<b>4</b>	<b>婚約数と結婚数の素因数分解</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b><math>k = -16</math> でのスーパー双子素数解</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>一般的な場合の平行移動</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b><math>\Theta = 0</math> の場合</b>	<b>18</b>
7.1	$m = 0$ のとき . . . . .	21
<b>8</b>	<b><math>(a, b)</math> は <math>m</math> 友愛数 計算例</b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b><math>k = -64</math> 友愛数, 計算例</b>	<b>22</b>



# 1 3項完全数の問題

研究会でポスターとして発表した, 数学の問題を2題載せる

$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$  を用いる.

$\Psi_{2,3}(\alpha) = -m$  を満たすとき,  $\alpha$  を平行移動  $m$  の (2,3) 型 3項完全数という.

$a$  が素数  $p$ , または  $2^e$  なら  $\Psi_{2,3}(a) = -1$ .

問題 1  $\Psi_{2,3}(a) = -1$  なら  $a$  が素数, または  $2^e$  となるか.

[

表 1:  $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2, m = 2$  のときの解

$a$	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$
29 5923739527652742180310	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$
9	$3^2$
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の2倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 655537$

問題 2  $m = 2$  の解はこれだけか?

2 に続いて特殊な意味を持つ素数が 6 個も続くのは大いなる不思議というべきである。  
これを 6 素数の奇跡と呼んでみたい。

私の生年月日である 1942 年 5 月 29 日のうちの月と日が出たことに大きな感動を感じる。



図 1: 6 素数のシンボルキャラクター; By Jun Iitaka

## 2 友愛数

2019年5月現在では10億個以上発見

友愛数についても平行移動を考えることにした.

**定義 1**  $F_k(a) = \sigma(a) - a + k$  とおく. ( $\sigma(a)$  は自然数  $a$  の約数の個数)  $b = F_k(a), a = F_k(b), a \neq b$  を満たすとき  $(a, b)$  を  $k$ -友愛数という.

あるいは  $(a, b)$  を 平行移動  $k$  の友愛数と呼んでもいい.  $k$  が小さい場合は先行研究がある.

- $k = 0$  のとき  $(a, b)$  を 元祖友愛数
- $k = -1$  のとき  $(a, b)$  を 婚約数. (婚約したが破談).
- $k = 1$  のとき  $(a, b)$  を 結婚数. (友情から結婚にいたって1子誕生).
- $k = 2$  のとき  $(a, b)$  を 子だくさん数.

maxima による友愛数の素因数分解のプログラムにより次の結果が得られた.

[

表 2:  $k = 0$  すなわち友愛数

$a$	素因数分解	型	$b$	素因数分解	型
284	$2^2 * 71$	A	220	$2^2 * 5 * 11$	D
6368	$2^5 * 199$	A	6232	$2^3 * 19 * 41$	D
18416	$2^4 * 1151$	A	17296	$2^4 * 23 * 47$	D
66992	$2^4 * 53 * 79$	D	66928	$2^4 * 47 * 89$	D
76084	$2^2 * 23 * 827$	D	63020	$2^2 * 5 * 23 * 137$	F
123152	$2^4 * 43 * 179$	D	122368	$2^9 * 239$	A
153176	$2^3 * 41 * 467$	D	141664	$2^5 * 19 * 233$	D
176336	$2^4 * 103 * 107$	D	171856	$2^4 * 23 * 467$	D
180848	$2^4 * 89 * 127$	D	176272	$2^4 * 23 * 479$	D
203432	$2^3 * 59 * 431$	D	185368	$2^3 * 17 * 29 * 47$	F
365084	$2^2 * 107 * 853$	D	280540	$2^2 * 5 * 13^2 * 83$	F
389924	$2^2 * 43 * 2267$	D	308620	$2^2 * 5 * 13 * 1187$	F
399592	$2^3 * 199 * 251$	D	356408	$2^3 * 13 * 23 * 149$	F
455344	$2^4 * 149 * 191$	D	437456	$2^4 * 19 * 1439$	D
514736	$2^4 * 53 * 607$	D	503056	$2^4 * 23 * 1367$	D
669688	$2^3 * 97 * 863$	D	600392	$2^3 * 13 * 23 * 251$	F
686072	$2^3 * 191 * 449$	D	609928	$2^3 * 11 * 29 * 239$	F
691256	$2^3 * 71 * 1217$	D	624184	$2^3 * 11 * 41 * 173$	F
712216	$2^3 * 127 * 701$	D	635624	$2^3 * 11 * 31 * 233$	F
796696	$2^3 * 53 * 1879$	D	726104	$2^3 * 17 * 19 * 281$	F
901424	$2^4 * 53 * 1063$	D	879712	$2^5 * 37 * 743$	D
980984	$2^3 * 47 * 2609$	D	898216	$2^3 * 11 * 59 * 173$	F
1043096	$2^3 * 23 * 5669$	D	998104	$2^3 * 17 * 41 * 179$	F

[

表 3:  $k = 0$  すなわち友愛数, 続き

$a$	素因数分解	型	$b$	素因数分解	型
2924	$2^2 * 17 * 43$	D	2620	$2^2 * 5 * 131$	D
5564	$2^2 * 13 * 107$	D	5020	$2^2 * 5 * 251$	D
10856	$2^3 * 23 * 59$	D	10744	$2^3 * 17 * 79$	D
168730	$2 * 5 * 47 * 359$	F	142310	$2 * 5 * 7 * 19 * 107$	E
202444	$2^2 * 11 * 43 * 107$	F	196724	$2^2 * 11 * 17 * 263$	F
430402	$2 * 7 * 71 * 433$	F	319550	$2 * 5^2 * 7 * 11 * 83$	F
652664	$2^3 * 17 * 4799$	F	643336	$2^3 * 29 * 47 * 59$	F
783556	$2^2 * 31 * 71 * 89$	F	667964	$2^2 * 11 * 17 * 19 * 47$	F
1210	$2 * 5 * 11^2$	F	1184	$2^5 * 37$	A
486178	$2 * 7^2 * 11^2 * 41$	F	469028	$2^2 * 7^2 * 2393$	F
88730	$2 * 5 * 19 * 467$	F	79750	$2 * 5^3 * 11 * 29$	F
14595	$3 * 5 * 7 * 139$	H	12285	$3^3 * 5 * 7 * 13$	H
71145	$3^3 * 5 * 17 * 31$	H	67095	$3^3 * 5 * 7 * 71$	H
87633	$3^2 * 7 * 13 * 107$	H	69615	$3^2 * 5 * 7 * 13 * 17$	H
124155	$3^2 * 5 * 31 * 89$	H	100485	$3^2 * 5 * 7 * 11 * 29$	H
139815	$3^2 * 5 * 13 * 239$	H	122265	$3^2 * 5 * 11 * 13 * 19$	H
525915	$3^2 * 5 * 13 * 29 * 31$	H	522405	$3^2 * 5 * 13 * 19 * 47$	H
863835	$3 * 5 * 7 * 19 * 433$	H	802725	$3 * 5^2 * 7 * 11 * 139$	H
1125765	$3^3 * 5 * 31 * 269$	H	947835	$3^3 * 5 * 7 * 17 * 59$	H

これらの素因数分解を観察すると次のことが見て取れる。  
A 型 (すなわち素因数分解が  $2^e p$ ), D 型 (素因数分解:  $2^e qr$ ) のペアが多い。  
D 型 と D 型のペアもある。奇数 (H 型) 同士のペアも散見する。  
A 型 と D 型 のペアは有限個しかないようだ。これらを決定出来たら面白い。  
偶数 と奇数のペアが存在しないことは奇数の完全数の不existence問題と同様の難問らしい。  
奇数の友愛数は 3 の倍数が多いが, 6 で割れないが 5 の倍数の例はある。  
友愛数の素因数分解の表を詳しく検討した結果  $a = 2^e r, b = 2^f pq$  という形の解を求めてみたいという気になった。  
 $e = f$  の場合はオイラーにより深く研究されていた。

### 3 Euler の結果

Euler は友愛数について次の結果をえていた. ただし  $\text{co}\sigma(a) = \sigma(a) - a$  とおく.

**定理 1**  $(p, q, r)$  は次式で定義された素数とする. ここで  $n, m (n > m)$  は自然数.

$K = 2^{n-m} + 1$  とおくと  $p = 2^m K - 1, q = 2^n K - 1, r = 2^{n+m} K^2 - 1$ .

$A = 2^n pq, B = 2^n r$  について,  $\text{co}\sigma(A) = B$ . さらに  $\text{co}\sigma(B) = A$ .

すなわち  $(A, B)$  は友愛数.

$N = 2^{n+1} - 1$  とおくと  $\text{co}\sigma(A) = \text{co}\sigma(2^n pq) = N(p+1)(q+1) - 2^n pq$ .

$p+1 = 2^m K, q+1 = 2^n K, pq = 2^{n+m} K^2 - K(2^n + 2^m) + 1$  に注意する.

$$\begin{aligned} N(p+1)(q+1) - 2^n pq &= N(2^{n+m} K^2) - 2^n (2^{n+m} K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)(2^{n+m} K^2) - 2^n (2^{n+m} K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\ &= 2^{2n+m+1} K^2 - 2^{n+m} K^2 - 2^n (2^{n+m} K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\ &= 2^n (2^{n+m} K^2 - 2^m K^2 + K(2^m + 2^n) - 1) \\ &= 2^n X. \end{aligned}$$

$r = 2^{n+m} K^2 - 1$  を用いると,  $X = 2^{n+m} K^2 - 1 - 2^m K^2 + K(2^m + 2^n) = r + L$  となる.

ここで,  $L = -2^m K^2 + K(2^m + 2^n) = KL_0$  とおくと  $L_0 = -2^m K + (2^m + 2^n) = -(2^m + 2^n) + (2^m + 2^n) = 0$ .

したがって,  $\text{co}\sigma(A) = N(p+1)(q+1) - 2^n pq = 2^n r = B$ . よって,  $\text{co}\sigma(A) = B$

同様にして  $\text{co}\sigma(B) = A$  も示される.

そのうち、参加者の一人である小学5年生の梶田光君から証明ができたとのメールがあり添付ファイルに見事な証明が書かれていた。その後半を紹介する。

### 3.1 $co\sigma(B) = A$ , 梶田君の証明

$A = 2^n pq, B = 2^m r$  について、 $\sigma(A) - A = co\sigma(A) = B$  は示されたので  $\sigma(A) = A + B$ .  $\sigma(B) = A + B$  を示せばよい。

上記にある証明で  $co\sigma(A) = B$  はできている。  $\sigma(A) = N(p+1)(q+1) = N(r+1) = \sigma(B)$  が成り立つから、  $\sigma(B) = \sigma(A) = A + B$ .



#### 4 婚約数と結婚数の素因数分解

[

表 4:  $k = -1$  婚約数

$a$	素因数分解	型	$b$	素因数分解
75	$3 * 5^2$	H	48	$2^4 * 3$
195	$3 * 5 * 13$	H	140	$2^2 * 5 * 7$
75495	$3 * 5 * 7 * 719$	H	62744	$2^3 * 11 * 23 * 31$
2295	$3^3 * 5 * 17$	H	2024	$2^3 * 11 * 23$
16587	$3^2 * 19 * 97$	H	8892	$2^2 * 3^2 * 13 * 19$
20735	$5 * 11 * 13 * 29$	H	9504	$2^5 * 3^3 * 11$
1925	$5^2 * 7 * 11$	H	1050	$2 * 3 * 5^2 * 7$
1648	$2^4 * 103$	A	1575	$3^2 * 5^2 * 7$
6128	$2^4 * 383$	A	5775	$3 * 5^2 * 7 * 11$

[

表 5:  $k = 1$  すなわち結婚数

$a$	素因数分解	型	$b$	素因数分解
11697	$3 * 7 * 557$	H	6160	$2^4 * 5 * 7 * 11$
16005	$3 * 5 * 11 * 97$	H	12220	$2^2 * 5 * 13 * 47$
28917	$3^5 * 7 * 17$	H	23500	$2^2 * 5^3 * 47$
76245	$3 * 5 * 13 * 17 * 23$	H	68908	$2^2 * 7 * 23 * 107$
339825	$3 * 5^2 * 23 * 197$	H	249424	$2^4 * 7 * 17 * 131$
570405	$3 * 5 * 11 * 3457$	H	425500	$2^2 * 5^3 * 23 * 37$
871585	$5 * 11 * 13 * 23 * 53$	H	434784	$2^5 * 3 * 7 * 647$
697851	$3^2 * 7 * 11 * 19 * 53$	H	649990	$2 * 5 * 11 * 19 * 311$
678376	$2^3 * 19 * 4463$	D	660825	$3^3 * 5^2 * 11 * 89$

偶数 と奇数のペアばかりらしい. しかも素因数分解の型が複雑なのでわからないまま H 型にしてある.

偶数 と奇数のペアばかりらしい.

以前のスーパー完全数の研究において  $m$  だけ平行移動を考えた。その結果  $m = -18, -58, -14$  などの場合に解としてスーパー双子素数が組織的な形を取りながら現れた。

これは私にとって大きな成功体験であった。そこで  $k$  友愛数の  $k$  をいろいろ変えながら分かりやすい形の解を探してみた。

$k = -16$  のとき特に美しい結果が出てきた。これは望外の成功であった。

## 5 $k = -16$ でのスーパー双子素数解

[

表 6:  $k = -16$

$a$	素因数分解	$b$	素因数分解
$k = -16$			
92	$2^2 * 23$	60	$2^2 * 3 * 5$
124	$2^2 * 31$	84	$2^2 * 3 * 7$
188	$2^2 * 47$	132	$2^2 * 3 * 11$
284	$2^2 * 71$	204	$2^2 * 3 * 17$
316	$2^2 * 79$	228	$2^2 * 3 * 19$
508	$2^2 * 127$	372	$2^2 * 3 * 31$
604	$2^2 * 151$	444	$2^2 * 3 * 37$
668	$2^2 * 167$	492	$2^2 * 3 * 41$
764	$2^2 * 191$	564	$2^2 * 3 * 47$
956	$2^2 * 239$	708	$2^2 * 3 * 59$
1436	$2^2 * 359$	1068	$2^2 * 3 * 89$
1724	$2^2 * 431$	1284	$2^2 * 3 * 107$
1756	$2^2 * 439$	1308	$2^2 * 3 * 109$
1084	$2^2 * 271$	804	$2^2 * 3 * 67$
2396	$2^2 * 599$	1788	$2^2 * 3 * 149$
2428	$2^2 * 607$	1812	$2^2 * 3 * 151$
2524	$2^2 * 631$	1884	$2^2 * 3 * 157$
2876	$2^2 * 719$	2148	$2^2 * 3 * 179$
2908	$2^2 * 727$	2172	$2^2 * 3 * 181$
1912	$2^3 * 239$	1672	$2^3 * 11 * 19$
664	$2^3 * 83$	580	$2^2 * 5 * 29$
1106	$2 * 7 * 79$	798	$2 * 3 * 7 * 19$
2390	$2 * 5 * 239$	1914	$2 * 3 * 11 * 29$

ここで主な解として  $a = 4p, b = 12q, (p, q):$ 奇素数, の解が多いことに注意する.

$F(a) = F_{-16}(a)$  とおくと  $F(a) = \sigma(a) - a - 16$  となる.

$a = 4p, b = 12q, (p, q):$ 奇素数 を解と仮定する.

$a = 4p$  のとき  $F(a) = \sigma(a) - a - 16 = 7(p+1) - 16 = 3p - 9 = b = 12q$  により  $p - 3 = 4q$ .

次に  $p - 3 = 4q$  を用いると  $b = 12q$  のとき  $F(b) = 28(q+1) - 12q - 16 = 16q + 12 = 4(4q+3) = 4p = a$  となる.

**定理 2**  $(a, b)$  は  $-16$  友愛数とする.  $F(a) = F_{-16}(a) = \sigma(a) - a - 16$  とおくと  $b = F(a), a = F(b), a \neq b$  と仮定する.

そこで解は  $a = 2^e p, b = 2^e q r, (p, q, r < q):$ 奇素数 の形になると仮定すると,  $e = 2, r = 4, a = 4p, b = 12q$  さらに  $p = 4q + 3$  を満たす.

ここで  $(q, p = 4q + 3)$  を満たすので  $(q, p)$  はスーパー双子素数.

**Proof.**

$a = 2^e p$  について,  $N = 2^{e+1} - 1$  とおいて

$$F(a) = \sigma(a) - a - 16 = N(p+1) - 2^e p - 16 = Np - 2^e p + N - 16 = 2^e p - p + N - 16.$$

$$F(a) = b = 2^e q r \text{ により, } 2^e p - p + N - 16 = 2^e q r.$$

$$\text{ゆえに } 2^e p = p - N + 16 + 2^e q r.$$

$$\text{整理して } (2^e - 1)p = -N + 16 + 2^e q r.$$

$$b = 2^e q r \text{ について, } \Delta = q + r \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} F(b) &= \sigma(b) - b - 16 \\ &= N(q+1)(r+1) - 2^e q r - 16 \\ &= Nqr - 2^e q r - 16 + N(\Delta + 1) \\ &= 2^e q r - qr + N(\Delta + 1) - 16 \\ &= a \\ &= 2^e p. \end{aligned}$$

$2^e q r - qr - 16 + N(\Delta + 1) = 2^e p$  を得る.

$2^e p = p - N + 16 + 2^e q r$  を代入して

$$2^e q r - qr - 16 + N(\Delta + 1) = p - N + 16 + 2^e q r.$$

これより

$$p = 2^e q r - qr - 16 + N(\Delta + 1) - (-N + 16 + 2^e q r) = -32 - qr + N\Delta + 2N.$$

$p = -32 - qr + N\Delta + 2N$  を  $(2^e - 1)p = -N + 16 + 2^e q r$  に代入すると

$$(2^e - 1)(-32 - qr + N(\Delta + 2)) = -N + 16 + 2^e qr.$$

$$\begin{aligned} -32(2^e - 1) - (2^e - 1)qr + (2^e - 1)N(\Delta + 2) &= -N + 16 + 2^e qr \\ -(2^e - 1)qr &\text{ を移項して} \end{aligned}$$

$$-32(2^e - 1) + (2^e - 1)N(\Delta + 2) = -N + 16 + 2^e qr + (2^e - 1)qr = -N + 16 + Nqr.$$

$$-32(2^e - 1) = -16 * 2(2^e - 1) = -16(N - 1) \text{ と直す}$$

$$-16(N - 1) + (2^e - 1)N(\Delta + 2) = -N + 16 + Nqr.$$

$N$  を除して

$$-16 + (2^e - 1)(\Delta + 2) = -1 + qr.$$

$$\Delta = q + r \text{ によつて, } \eta = 2^e - 1, q_0 = q - \eta, r_0 = r - \eta, \text{ とおくと, } -15 + \eta(\Delta + 2) = qr.$$

$$q_0 r_0 = qr - \eta\Delta + \eta^2 = \eta^2 + 2\eta - 15.$$

$$\Theta = \eta^2 + 2\eta - 15 \text{ を導入すると } q_0 r_0 = \Theta.$$

$e = 2, 3, 4, \dots$  と場合を分けて詳しく調べよう.

1.  $e = 2$ .  $\eta = 2^e - 1 = 3, N = 7, q_0 = q - 3, r_0 = r - 3, \Theta = \eta^2 + 2\eta - 15 = 0$ .  $q_0 > r_0$  により,  $r_0 = 0, r = 3, b = 6q$ .

$$\begin{aligned} p &= -32 - qr + N\Delta + 2N \\ &= -32 - 3q + 7 * (q + 3) + 7 * 2 \\ &= 4q - 32 + 35 \\ &= 4q + 3. \end{aligned}$$

よつて,  $a = 4 * p, b = 2^2 * q * r = 12q, p = 4q + 3$ .  
これはうまく行った.

2.  $e = 3$ .  $\eta = 2^e - 1 = 7, N = 15, q_0 = q - 7, r_0 = r - 7, \Theta = \eta^2 + 2\eta - 15 = 7(7 + 9) - 15 = 63 - 15 = 48$ .

$$q_0 r_0 = \Theta = 48 \text{ により, } r_0 = 4, q_0 = 12. r = 11, q = 19.$$

$$p = -32 - qr + N\Delta + 2N = -32 - 11 * 19 + 15(11 + 19) + 30 = 239.$$

$$\text{よつて, } a = 1912 = 2^3 * 239, b = 1672 = 2^3 * q * r = 2^3 * 11 * 19.$$

3.  $e = 4$ .  $\eta = 2^e - 1 = 15, N = 31, q_0 = q - 15, r_0 = r - 15, \Theta = \eta^2 + 2\eta - 15 = 15 * 17 - 15 = 15 * 16$ .  $q_0 r_0 = \Theta = 2^4 * 3 * 5$  により,  $r_0 = 3 * 2 = 6, q_0 = 5 * 4 = 20$ .  $r = 21$ ; 素数でないから矛盾.

$r_0 = 5 * 2 = 10, q_0 = 3 * 8 = 24. r = 25;$  矛盾.

これ以上解はないらしい.

このように素因数分解の型を決めて A 型, D 型 と決めて簡単な場合の平行移動  $-16$  の友愛数の決定に成功したのである. これはオイラーの友愛数の構成式を連想させるものがある.

## 6 一般的な場合の平行移動

今度はより一般的な場合を扱ってみよう.

$(a, b)$  は  $m$  友愛数とする.

$F(a) = F_m(a) = \sigma(a) - a + m$  とおくと  $b = F(a), a = F(b), a \neq b$  となる.

解は AD 型 と仮定する. すなわち  $a = 2^e p, b = 2^e qr, (p, q, r < q: \text{奇素数})$  の形になると仮定する.

$a = 2^e p$  について,  $N = 2^{e+1} - 1$  とおいて  $F(a) = \sigma(a) - a + m = N(p+1) - 2^e p + m = Np - 2^e p + N + m = 2^e p - p + N + m.$

$F(a) = b = 2^e qr$  により,  $2^e p - p + N + m = 2^e qr.$

ゆえに  $2^e p = p - N - m + 2^e qr.$

整理して  $(2^e - 1)p = -N - m + 2^e qr.$

$b = 2^e qr$  について,  $\Delta = q + r$  とおくと

$$\begin{aligned} F(b) &= \sigma(b) - b + m \\ &= N(q+1)(r+1) - 2^e qr + m \\ &= Nqr - 2^e qr + m + N(\Delta + 1) \\ &= 2^e qr - qr + N(\Delta + 1) + m \\ &= a \\ &= 2^e p. \end{aligned}$$

ゆえに  $2^e qr - qr + m + N(\Delta + 1) = 2^e p$  を得る.

$2^e p = p - N - m + 2^e qr$  を代入して

$$2^e qr - qr + m + N(\Delta + 1) = p - N - m + 2^e qr.$$

これより

$$p = 2^e qr - qr + m + N(\Delta + 1) - (-N - m + 2^e qr) = 2m - qr + N\Delta + 2N.$$

$p = 2m - qr + N\Delta + 2N$  を  $(2^e - 1)p = -N - m + 2^e qr$  に代入すると

$$(2^e - 1)(2m - qr + N(\Delta + 2)) = -N - m + 2^e qr.$$

$$2m(2^e - 1) - (2^e - 1)qr + (2^e - 1)N(\Delta + 2) = -N - m + 2^e qr$$

$-(2^e - 1)qr$  を移項して

$$2m(2^e - 1) + (2^e - 1)N(\Delta + 2) = -N - m + 2^e qr + (2^e - 1)qr = -N - m + Nqr.$$

$$2m(2^e - 1) = 2m(2^e - 1) = m(N - 1) \text{ と直すと}$$

$$m(N - 1) + (2^e - 1)N(\Delta + 2) = -N - m + Nqr.$$

$N$  を除して

$$m + (2^e - 1)(\Delta + 2) = -1 + qr.$$

$$\Delta = q + r \text{ によって, } \eta = 2^e - 1, q_0 = q - \eta, r_0 = r - \eta, \text{ とおくと, } m + 1 + \eta(\Delta + 2) = qr.$$

$$q_0 r_0 = qr - \eta\Delta + \eta^2 = \eta^2 + 2\eta + m + 1.$$

$\Theta = \eta^2 + 2\eta + m + 1 = (2^e - 1)(2^e + 1) + m + 1 = 2^{2e} + m$  とおくとき  $q_0 r_0 = \Theta$ . これを基本等式という.

与えられた  $m, e$  に対して,  $\eta = 2^e - 1$  を用いて  $\Theta = \eta^2 + 2\eta + m + 1 = (2^e - 1)(2^e + 1) + m + 1 = 2^{2e} + m$  とおく

$\Theta$  を 2 因子分解  $q_0 r_0 = \Theta$  する.

$q = q_0 + \eta, r = r_0 + \eta$  がともに素数なら,  $a = 2^e qr$  は A 型解. かくして  $m$  友愛会を与える.



## 7 $\Theta = 0$ の場合

指数  $e > 1$  に対して  $m = -2^{2e}$  とおく.  $\Theta = 0$  になり基本等式は  $q_0 r_0 = \Theta = 0$ . ここで  $q > r$  と仮定しておく.  $r_0 = 0; r = \eta = 2^e - 1$ .  $q_0$  はとくに定まらないが  $q = q_0 + \eta > r = \eta$  は素数だけ確認する. さらに  $b = 2^e \eta q = 2^e (2^e - 1)q$ .

$a = 2^e p, b = 2^e r q$  であるが公式  $p = 2m - qr + N\Delta + 2N$  により  $p$  が決定される.

$$p = 2m - qr + N\Delta + 2N = -2 * 2^{2e} - qr + (2^{e+1} - 1)(q + r) + 2.$$

$q$  で整理する.

$$\begin{aligned} p &= -2 * 2^{2e} - qr + (2^{e+1} - 1)(q + r) + 2 \\ &= -2 * 2^{2e} + (2^{e+1} - 1 - r)q + (2^{e+1} - 1)r + 2 \\ &= -2 * 2^{2e} + (2^{e+1} - 2^e)q + (2^{e+1} - 1)(2^e - 1) + 2 \\ &= -2 * 2^{2e} + 2^e q + 2^{2e+1} - 2^e + 2^{e+1} - 1 \\ &= 2^e q + 2^e - 1 \end{aligned}$$

かくして得られた式は

$$p = 2^e q + 2^e - 1.$$

$e = 1$  のとき  $m = -2^2 = -4, p = 2q + 1$  となるが,  $\eta = 2 - 1 = 1, r = 1$ . これは素数ではない.

1.  $e = 2$  のとき  $m = -2^4 = -16, p = 4q + 3, b = 2^e(2^e - 1)q = 12q$ .
2.  $e = 3$  のとき  $m = -2^6 = -64, p = 8q + 7, b = 2^e(2^e - 1)q = 56q$ .
3.  $e = 4$  のとき  $m = -2^8 = -256, p = 16q + 15, b = 2^e(2^e - 1)q = 240q$ .

念のため次の結果を示す.

**命題 1**  $p = 2^e q + 2^e - 1, r = 2^e - 1, m = -2^{2e}$  を満たすとき,  $a = 2^e p, b = 2^e r q$  は 平行移動  $m = -2^{2e}$  の友愛数.

**Proof.**

$F(\alpha) = \sigma(\alpha) - \alpha + m$  とおくとき  $a = 2^e p, b = 2^e r q$  について,  $F(a) = b, F(b) = a$  を示せばよい.

$$N = 2^{e+1} - 1 \text{ とおくとき } \sigma(a) = N(p + 1) = Np + N = 2^{e+1}p - p + N.$$

$$\begin{aligned} F(a) &= 2^{e+1}p - p + N - 2^e p + m = 2^e p - p + 2^{e+1} - 1 - 2^{2e} \\ &= (2^e - 1)p + 2 * 2^e - 1 - 2^{2e} \\ &= (2^e - 1)p - (2^e - 1)^2 \end{aligned}$$

最右端の式  $(2^e - 1)p - (2^e - 1)^2$  を  $X$  とおく.

一方,  $b = 2^e r q = 2^e (2^e - 1) q = (2^e - 1) 2^e q$  を変形して.

$p = 2^e q + 2^e - 1$  に  $2^e - 1$  を乗じて  $(2^e - 1)p = (2^e - 1) 2^e q + (2^e - 1)^2$ .

ゆえに,

$$X = (2^e - 1)p - (2^e - 1)^2 = (2^e - 1) 2^e q = b.$$

よって,  $X = b$ .

End.

[

表 7:  $e = 3, m = -64, a = 8p, b = 56q$ 

$a$	素因数分解	$b$	素因数分解
248	$2^3 * 31$	168	$2^3 * 3 * 7$
376	$2^3 * 47$	280	$2^3 * 5 * 7$
1528	$2^3 * 191$	1288	$2^3 * 7 * 23$
1912	$2^3 * 239$	1624	$2^3 * 7 * 29$
3064	$2^3 * 383$	2632	$2^3 * 7 * 47$
3448	$2^3 * 431$	2968	$2^3 * 7 * 53$
3832	$2^3 * 479$	3304	$2^3 * 7 * 59$
5752	$2^3 * 719$	4984	$2^3 * 7 * 89$
6904	$2^3 * 863$	5992	$2^3 * 7 * 107$
7288	$2^3 * 911$	6328	$2^3 * 7 * 113$
8824	$2^3 * 1103$	7672	$2^3 * 7 * 137$
11512	$2^3 * 1439$	10024	$2^3 * 7 * 179$
12664	$2^3 * 1583$	11032	$2^3 * 7 * 197$
14584	$2^3 * 1823$	12712	$2^3 * 7 * 227$
14968	$2^3 * 1871$	13048	$2^3 * 7 * 233$
16504	$2^3 * 2063$	14392	$2^3 * 7 * 257$
16888	$2^3 * 2111$	14728	$2^3 * 7 * 263$
18808	$2^3 * 2351$	16408	$2^3 * 7 * 293$

1.  $e = 1$ .  $\Theta = 4 + m$ .

$m = -4$  ならば  $\eta = 2^e - 1 = 1, q_0 r_0 = 0, q_0 > r_0$  により,  $r_0 = 0, r = 1$ .  $r$  は素数なので不適.

2.  $e = 2$ .  $\eta = 2^e - 1 = 3, N = 7, q_0 = q - 3, r_0 = r - 3, \Theta = 16 + m$ .

$m = -16$  ならば  $q_0 > r_0$  により,  $r_0 = 0, r = 3$ .

$b = 6q, p = +2m - qr + N\Delta + 2N = +2m - 3q + 7*(q+3) + 7*2 = 4q + 2m + 35 = 4q + 3$ .

よって,  $a = 4p = 2^2 * p, b = 2^2 * q * r = 12q$ .

2.  $e = 3$ .  $\eta = 2^e - 1 = 7, N = 15, q_0 = q - 7, r_0 = r - 7, \Theta = 16 + m$ .

$m = -16$  ならば  $r_0 = r - 7 = 0$ . よって,  $r = 7, q > 7$  は素数なので  $b = 8qr = 56q$ .

Proof.

$a = 2^e p$  について,  $N = 2^{e+1} - 1$  とおいて

$F(a) = \sigma(a) - a - 16 = N(p+1) - 2^e p - 16 = Np - 2^e p + N - 16 = 2^e p - p + N - 16$ .

$F(a) = b = 2^e qr$  により,  $2^e p - p + N - 16 = 2^e qr$ .

ゆえに  $2^e p = p - N + 16 + 2^e qr$ .

このように素因数分解の型を決めて平行移動の友愛数の決定に成功したのである。これはオイラーの友愛数の構成式を連想させるものがある。

### 7.1 $m = 0$ のとき

$\Theta = 2^{2e} + m = 2^{2e}$  なので  $\eta = 2^e - 1, q_0 r_0 = 2^{2e}$ . これより,  $q_0 = 2^s, r_0 = 2^t, s + t = 2e$ .  
ここで,  $t > e > s$  としておく.

$q = 2^s + \eta = 2^s + 2^e - 1, r = 2^t + 2^e - 1. K = 2^{e-s} + 1$  とおくと

$$q = 2^s + 2^e - 1 = 2^s K - 1, r = 2^t + 2^e - 1 = 2^{t-e} K - 1 = 2^t - 2^{t-e} - 1.$$

一方  $p + 1 = (q + 1)(r + 1) = (2^s + 2^e)(2^t + 2^e)$  によって,  $p = (q + 1)(r + 1) - 1 = 2^s K 2^{t-e} K - 1 = 2^{s+t-e} K^2 - 1$ .

結局,  $K = 2^{e-s} + 1$  を使うと,  $q = 2^s K - 1, r = 2^{t-e} K - 1, p = 2^{s+t-e} K^2 - 1$ .

これはオイラーの式である.

## 8 $(a, b)$ は $m$ 友愛数 計算例

[

表 8:  $k = -16$

$a$	素因数分解	$b$	素因数分解
$k = -16$			
664	$2^3 * 83$	580	$2^2 * 5 * 29$
1912	$2^3 * 239$	1672	$2^3 * 11 * 19$
2390	$2 * 5 * 239$	1914	$2 * 3 * 11 * 29$
1106	$2 * 7 * 79$	798	$2 * 3 * 7 * 19$

$m = -16$  のとき,

$$\Theta = \eta^2 + 2\eta + m + 1 = (2^e - 1)(2^e + 1) + m + 1 = 2^{2e} + m = 2^{2e} - 16.$$

$e = 2$  なら  $\eta = 2^e - 1 = 3, N = 7, \Theta = 0$ . よって,  $q_0 r_0 = 0, r = r_0 + 3 = 3 < q$ .

$$p = 2m - qr + N(\Delta + 2) = -32 - 3q + 7(q + 2) + 14 = 3 + 4q.$$

$(q, p = 3 + 4q)$  はスーパー双子素数.

$e = 3$  なら  $\eta = 2^e - 1 = 7, N = 15, \Theta = 2^{2e} - 16 = 63 - 16 = 48 = 12 * 4$ . よって,  $q_0 r_0 = 48 = 12 * 4, r = r_0 + 7 = 4 + 7 = 11, q = q_0 + 7 = 12 + 7 = 19, b = 8 * 11 * 19 = 1672$ .

$$p = 2m - qr + N(\Delta + 2) = -32 - 11 * 19 + 15(11 + 19 + 2) = 239, a = 2^e * p = 8 * 239 = 1912$$

$e = 4$  なら  $\eta = 2^e - 1 = 15, N = 31, \Theta = 2^{2e} - 16 = 256 - 16 = 240$ . よって,  $q_0 r_0 = 48 = 12 * 4, r = r_0 + 7 = 4 + 7 = 11, q = q_0 + 7 = 12 + 7 = 19, b = 8 * 11 * 19 = 1672$ .

## 9 $k = -64$ 友愛数, 計算例

[

表 9:  $k = -64$ 

$a$	素因数分解	$b$	素因数分解
20344	$2^3 * 2543$	17752	$2^3 * 7 * 317$
23032	$2^3 * 2879$	20104	$2^3 * 7 * 359$
24952	$2^3 * 3119$	21784	$2^3 * 7 * 389$
26872	$2^3 * 3359$	23464	$2^3 * 7 * 419$
32632	$2^3 * 4079$	28504	$2^3 * 7 * 509$
35704	$2^3 * 4463$	31192	$2^3 * 7 * 557$
37624	$2^3 * 4703$	32872	$2^3 * 7 * 587$
38008	$2^3 * 4751$	33208	$2^3 * 7 * 593$
38392	$2^3 * 4799$	33544	$2^3 * 7 * 599$
39544	$2^3 * 4943$	34552	$2^3 * 7 * 617$
41848	$2^3 * 5231$	36568	$2^3 * 7 * 653$
42232	$2^3 * 5279$	36904	$2^3 * 7 * 659$
43768	$2^3 * 5471$	38248	$2^3 * 7 * 683$
53752	$2^3 * 6719$	46984	$2^3 * 7 * 839$
54904	$2^3 * 6863$	47992	$2^3 * 7 * 857$
55288	$2^3 * 6911$	48328	$2^3 * 7 * 863$
56824	$2^3 * 7103$	49672	$2^3 * 7 * 887$
60664	$2^3 * 7583$	53032	$2^3 * 7 * 947$
62584	$2^3 * 7823$	54712	$2^3 * 7 * 977$
64888	$2^3 * 8111$	56728	$2^3 * 7 * 1013$
74488	$2^3 * 9311$	65128	$2^3 * 7 * 1163$
76408	$2^3 * 9551$	66808	$2^3 * 7 * 1193$
77944	$2^3 * 9743$	68152	$2^3 * 7 * 1217$
70264	$2^3 * 8783$	61432	$2^3 * 7 * 1097$
70648	$2^3 * 8831$	61768	$2^3 * 7 * 1103$
78328	$2^3 * 9791$	68488	$2^3 * 7 * 1223$
78712	$2^3 * 9839$	68824	$2^3 * 7 * 1229$
104824	$2^3 * 13103$	91672	$2^3 * 7 * 1637$

[

表 10:  $k = -64$ 

$a$	素因数分解	$b$	素因数分解
80632	$2^3 * 10079$	70504	$2^3 * 7 * 1259$
81784	$2^3 * 10223$	71512	$2^3 * 7 * 1277$
82168	$2^3 * 10271$	71848	$2^3 * 7 * 1283$
83704	$2^3 * 10463$	73192	$2^3 * 7 * 1307$
84472	$2^3 * 10559$	73864	$2^3 * 7 * 1319$
91768	$2^3 * 11471$	80248	$2^3 * 7 * 1433$
92152	$2^3 * 11519$	80584	$2^3 * 7 * 1439$
95224	$2^3 * 11903$	83272	$2^3 * 7 * 1487$
90232	$2^3 * 11279$	78904	$2^3 * 7 * 1409$
91384	$2^3 * 11423$	79912	$2^3 * 7 * 1427$
99832	$2^3 * 12479$	87304	$2^3 * 7 * 1559$
101368	$2^3 * 12671$	88648	$2^3 * 7 * 1583$
103288	$2^3 * 12911$	90328	$2^3 * 7 * 1613$
103672	$2^3 * 12959$	90664	$2^3 * 7 * 1619$
109432	$2^3 * 13679$	95704	$2^3 * 7 * 1709$

# 碁石ひろいとフィボナッチ数

片山真一，安井宏晴  
徳島大学理工学部，倉吉北高校

August 23, 2019 (東京理科大学)

## 1 「碁石ひろい」とは何か

このフィボナッチ研究集会では、2年続けて「石取りゲーム」の「Whthoffの二山崩しの変種」に関する結果を報告した。日本での石取りゲーム研究は、明治以降になって海外から輸入される形で始まり現在まで発展してきた歴史的な側面についても紹介した。

それでは、江戸時代の和算では、石取りゲームに該当するものは無かったのだろうか？

調べたところでは、現在扱われている石取りゲームのような二人以上の対戦型のゲームは発達せず、余り数は残っていないようである。しかしその一方で、一人で遊ぶ一種の石取りゲームが、独自に発展しており「ひろいもの」と呼ばれていたことが分かった。

平山諦の『東西数学物語』(1956年)には、和算に限らない様々な数学ゲームの話題が取り上げられていて面白い。「ひろいもの」に関しても、現在も残っている『和國知恵較』(環中仙 1727年)から5題、『勘者御伽双紙』(中根彦循 1743年)から4題明治12年(1879年)の前田理軒の『算法玉手箱』から1題の併せて10題が選ばれて掲載されている。さらにその解答(取り尽くし方)も収録されている。

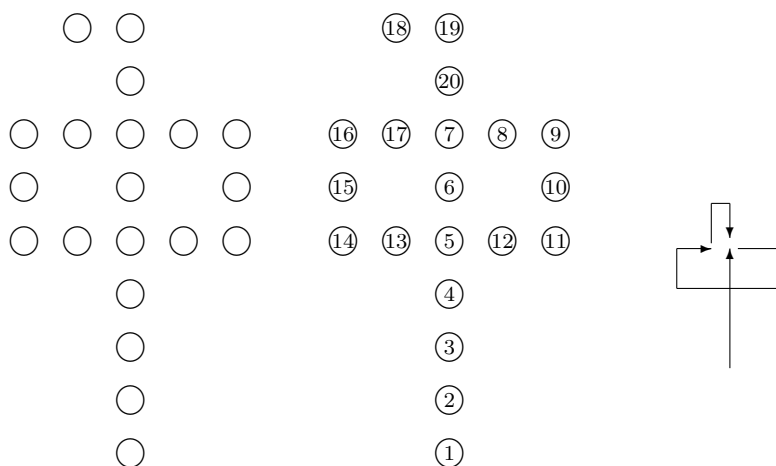
注意) 実際に残されている問題としては、『和國知恵較』と『勘者御伽双紙』から以下の12題とその拾い付くし方が残されている。

『勘者御伽双紙』からは、第一ヶ條「中の字」、第二ヶ條「六角」、第三ヶ條「井筒」、第四ヶ條「かんざし」、第五ヶ條「五の字」、第六ヶ條「八角」、第七ヶ條「九の字」の7題が残されている。また『和國知恵較』からは、第一ヶ條「枡形」、第二ヶ條「矢の形」、第三ヶ條「片根矢の形」、第四ヶ條「八ツ橋」、第五ヶ條「卍の形」の5題が残されている。この12題については、その形と取り付くし方を後で載せておく



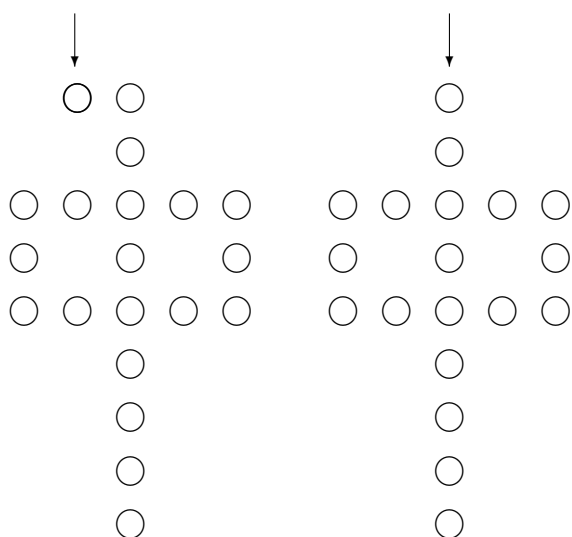
ことにするが、碁石ひろいの最初の例として『勘者御伽双紙』で一番易しい第一カ條の「中の字」を紹介しておこう。

取り尽くし方法 と 取り尽くし方の略記方法



取り尽くせる要石、

こちらは取り尽くし不可能な配置



注意) 上で真ん中を3段から4段にしたり、田を加えて「田中」にしても取り尽くし可能な図形に出来る。

この問題一つからも、和算で扱われた「碁石ひろい」の問題の特徴が見てとれる。

1. まず簡単に分かる場合は扱わない、
2. その配置で無ければ取り尽くせない微妙な場合を扱う。

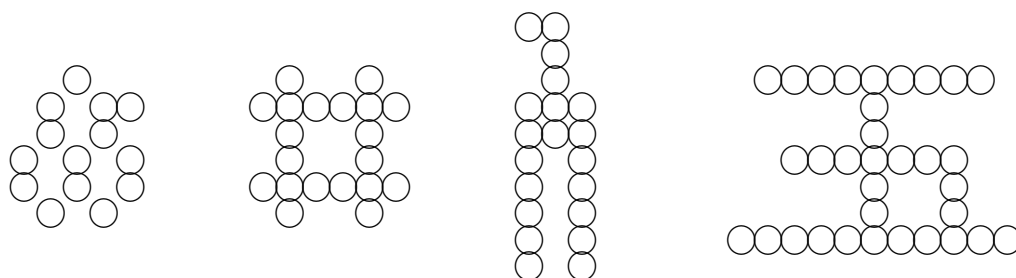
碁石ひろいの問題を解く場合、その微妙な所が難しく楽しめる部分であるが、本当は、与えられた問題を解くだけでなく、ギリギリ取り尽くし可能な新しい配置を作る方がより面白いように思える。そのためにも、以下では取り尽くし可能という性質をもう少し詳しく考察してみよう。

ここでは、和算の「ひろいもの」も含め、全て「碁石ひろい」と呼ぶことにする。改めて「碁石ひろい」のルールについて説明しておこう。碁盤の上に置かれた石を、以下のルールに従って拾う。

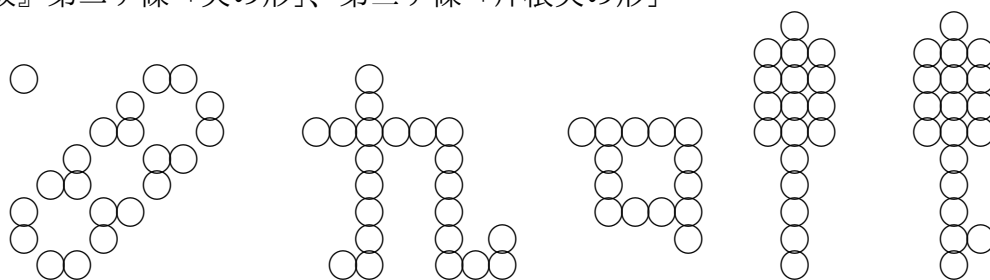
1. どこから取り始めても構わない。
2. 上下左右（縦横のみ）に移動しながら順に石を取る。なお石のないところでは曲がれない。
3. 進む先の石は必ず取る。
4. 後戻りはできない。また斜めにも進めない。
5. 全部の石を取り尽くしたらゲーム終了。

ここで『勤者御伽双紙』から「中の字」以外の6題と『和國知恵較』から5題を掲載しておこう。

第二ヶ條「六角」、第三ヶ條「井筒」、第四ヶ條「かんざし」、第五ヶ條「五の字」



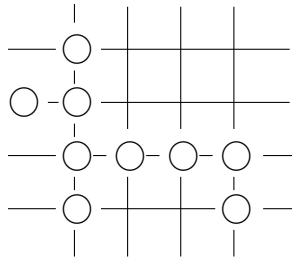
第六ヶ條「八角」、第七ヶ條「九の字」、『和國知恵較』第一ヶ條「枡形」、『和國知恵較』第二ヶ條「矢の形」、第三ヶ條「片根矢の形」



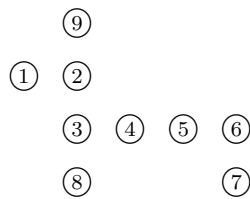
## 2 「碁石ひろい」の基本的な性質

碁石ひろい（ひろいもの）は、上で述べたような和算の過去問だけでなく、現在でもパズルとして新しい問題が作成されている。パズルゲームの出版社「ニコリ」

には、「碁石拾い」という名前で、新作の問題が掲載されていて、ニコリの web サイトでは、次の例題が掲載されている。少し考えてみてください。



解答と解説は、次の図を参照してください。



上の例題で ① と ⑨ は、始点か終点のいずれかにしかならない特殊な点である。従って片方を始点に選べば、自動的に他方は終点になる。以下では、碁石ひろいの図でこの様な点を「端点」と呼ぶことにする。このとき次のような「一筆書きの解法」と類似する性質が成立する。

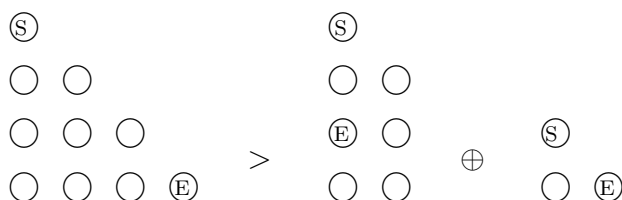
**Theorem 2.1** 与えられた碁石の配置に 3 点以上の端点があれば、その碁石を全て取り尽くすことは不可能である。また端点が 2 点のときは、片方の端点が始点ならば、残りの 1 点は、終点になる。

注意) ニコリの例題では、⑨ を始点すると、碁石は決して拾いきれない。少し考察すれば① を始点とする上の解は、ただ一通りの取り尽くし可能な碁石の拾い方であることも分かる。

以下、拾い尽くすことが可能な碁石の配置を「取り尽くし可能」、不可能な配置を「取り尽くし不可能」と呼ぶ。Theorem 2.1 は、取り尽くし可能な配置の必要条件が、端点が 2 点以下であるという命題である。2 つの碁石の配置  $A_1$ 、 $A_2$  で、 $A_1$  は、端点  $S_1$ 、 $E_1$  を持ち、 $A_2$  は端点  $S_2$ 、 $E_2$  を持つと仮定する。この 2 つの図形を  $A_1$  の端点  $E_1$  と  $A_2$  の端点  $S_2$  を繋いだ図形  $A$  で、 $A_1$  の端点  $S_1$  から碁石を取り始めたときに  $A_2$  の部分に移るには、 $E_1$ 、 $S_2$  を必ず経由する拾い方をする場合に、図形  $A$  を  $A_1$  と  $A_2$  の「結合」と呼ぶ。

逆に、配置  $A$  が与えられたとき、 $A$  を2つの配置図形  $A_1$  と  $A_2$  に分けて、 $A_1$  の碁石を取り尽くし、 $A_1$  の決められた点  $E_1$  を  $A_1$  の終点とし、隣接した  $A_2$  の点を  $A_2$  の始点  $S_2$  として続いて  $A_2$  を取り尽くすことにするとき、配置  $A$  を2つの配置  $A_1$  と  $A_2$  に「分割する」と呼び、 $A > A_1 \oplus A_2$  と表す。

分割の例 (後で述べる  $A = T_4, A_1 = D_2, A_2 = T_2$ )



**Theorem 2.2** 与えられた碁石の配置  $A$  を取り尽くし可能な配置  $A_1$  と取り尽くし可能な配置  $A_2$  の2つの配置の結合に分割可能 (即ち  $A > A_1 \oplus A_2$ ) であるとき、元の配置  $A$  は、拾い尽くし可能である。

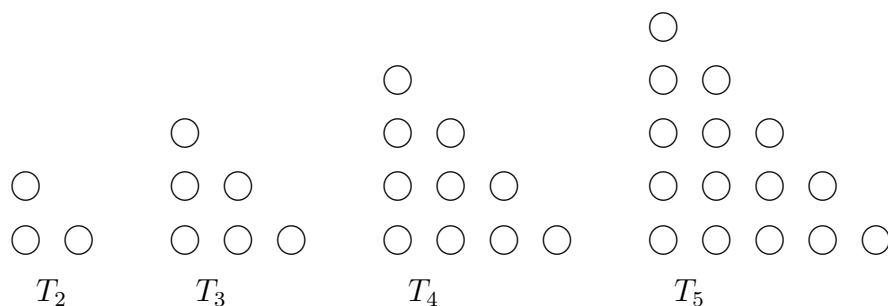
**Theorem 2.3** 与えられた碁石の配置  $A$  に対して、次のような  $A$  の部分配置の集合  $S = \{A_1, \dots, A_k\}$  が存在すると仮定する。

(1)  $A$  の石を取っていくと  $S$  のいずれかの配置  $A_i \in S$  が必ず現れる。

(2)  $A_i \in S$  ( $1 \leq i \leq k$ ) は全て取り尽くし不可能である。

このとき  $A$  は取り尽くし不可能である。

下記のような碁石の配置を「三角積み」 $T_n$  と呼ぶ。この  $T_n$  に今述べた定理を適用する。まず  $T_n$  は、対角線に関して線対称な2つの端点を持つので、取り付くしの始点を「左上隅の石」、終点を「右下隅の石」として一般性を失わない。



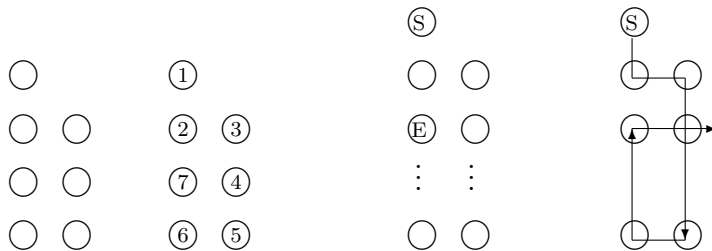
三角積みを、その一辺に並ぶ石の数  $n$  でナンバリングして、 $T_2, T_3, T_4, T_5$  と表す。

$$T_4 > D_2 \oplus T_2, \quad \text{一般の } T_{n+2} > D_n \oplus T_n$$

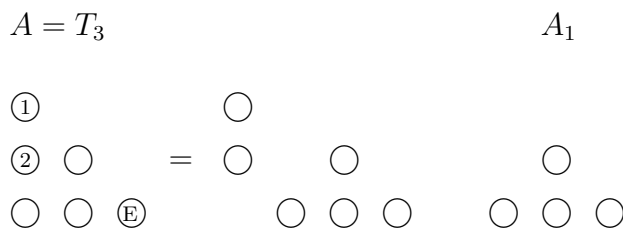


上のように三角積みは、一辺に  $n$  個、全体で  $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  並んだ場合が  $T_n$  である。次に  $T_{n+2}$  を  $T_n$  と次のような台形部分  $D_n$  に分ける。このとき、下の図で分かるように  $n$  が 2 以上なら台形配置  $D_n$  は、始点  $S$  から取り始めて、終点  $E$  まで順に取り尽くせることが分かる。

$D_2$  の取り尽くし方      一般の  $D_n$  の取り尽くし方



$T_3$  が取り尽くし不可能であることは、次のようにして分かる。まず下の図の  $A_1$  は、端点を 3 点持ち、Theorem 2.1 から取り尽くし不可能な配置であることが分かる。 $A = T_3$ 、 $S = \{A_1\}$  とすると  $A, S$  が、Theorem 2.3 の条件を満たす。従って  $T_3$  は取り尽くし不可能である。



$T_5$  は取り尽くし可能であり、次のような 2 通りの取り尽くし方法（これで全て）がある。

$T_5$	取り尽くし法 (その 1)	取り尽くし法 (その 2)
○	①	①
○ ○	② ③	② ③
○ ○ ○	⑪ ④ ⑩	⑫ ④ ⑪
○ ○ ○ ○	⑫ ⑤ ⑥ ⑦	⑬ ⑤ ⑩ ⑨
○ ○ ○ ○ ○	⑬ ⑭ ⑨ ⑧ ⑮	⑭ ⑥ ⑦ ⑧ ⑮

従って  $T_2, T_5$  が取り尽くし可能で、 $T_3$  が取り尽くし不可能なので、次のことが分かる。

**Theorem 2.4** 三角積み  $T_n$  は ( $n$  が 3 を除き) は、取り尽くし可能である。

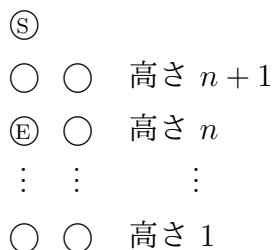
注意) 福井昌則、末續鴻輝、鈴木顕さん達が 2017 年に、報告集 [8] で基石拾いの問題の計算困難性について結果を発表しており、その中でこの定理の結果も、我々とは独立に既に得られている。ただし後で述べる取り尽くし方の数については、今まで考察を加えた文献は見当たらない。

### 3 「三角積み」とフィボナッチ数

基石ひろいを考える場合、取り尽くせるかどうかの判定が最初である。次に考えるのは、取り尽くせる場合に「何通り取り尽くし方があるか」である。基石の初期配置  $A$  の始点と終点があらかじめ設定してある場合を考える。その全ての取り尽くし方法の総数を  $C(A)$  と書く。

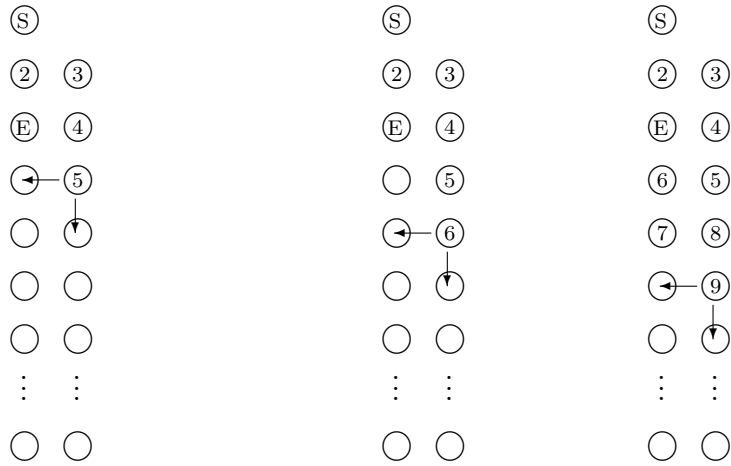
ここで最初に扱うのは、三角積みの所で考えた次ページのような台形配置  $D_n$  である。 $D_n$  の  $2n+3$  個の基石のうち、その始点と終点は、図で示した  $S, E$  と固定する。このとき台形  $D_n$  の取り尽くし方の数  $C(D_n)$  について次のことが成立する。

台形配置  $D_n$  の始点  $S$  と終点  $E$

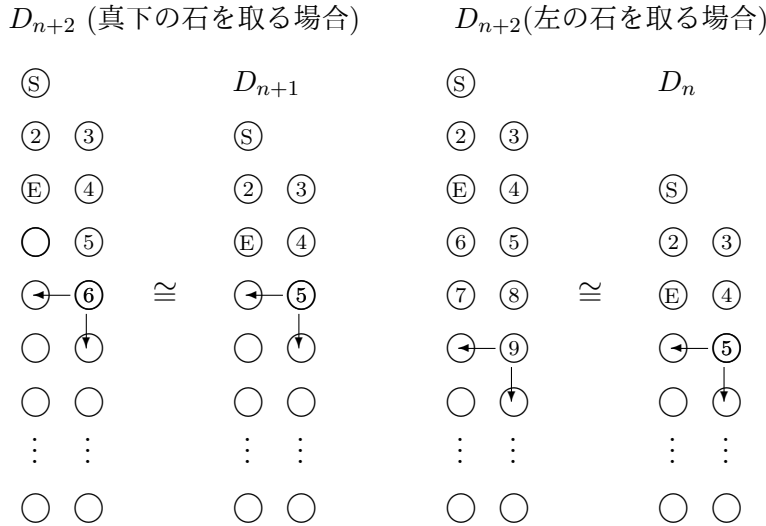


**Theorem 3.1**  $n \geq 2$  のとき  $C(D_n) = F_{n-1}$  ( $n$  番目のフィボナッチ数)

$D_n$  の取り尽くし (最初の部分) 真下の石を取る場合 左の石を取る場合



$C(D_{n+2}) = C(D_{n+1}) + C(D_n)$  の根拠となる基石の配置は次ページ。



$C(D_3) = C(D_2) = 1$  は容易に確かめることが出来るので、漸化式  $C(D_{n+2}) = C(D_{n+1}) + C(D_n)$  と併せて先程の結果を得る。この結果と基石配置の分割の考え方から「三角積み」 $T_n$  の取り尽くし方の数  $C(T_n)$  の下からの評価を得ることが出来る。結果が見やすい  $n = 2m + 4$  に制限した場合に得られる結果を述べておく。

$$T_{2m+4} > D_{2m+2} \oplus T_{2m+2} > D_{2m+2} \oplus D_{2m} \oplus T_{2m} > \cdots > D_{2m+2} \oplus D_{2m} \oplus D_{2m-2} \oplus \cdots \oplus D_2 \oplus T_2$$

この分割から取り尽くし方法の総数に関する次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} C(T_{2m+4}) &\geq C(D_{2m+2})C(T_{2m+2}) \geq C(D_{2m+2})C(D_{2m})C(T_{2m}) \geq \cdots \\ &\geq C(D_{2m+2})C(D_{2m})C(D_{2m-2}) \cdots C(D_2)C(T_2) \end{aligned}$$

**Theorem 3.2**  $C(T_{2m+4}) \geq F_{2m+1} \cdot F_{2m-1} \cdots F_3 \cdot F_1$

$n \geq 1$  のとき、フィボナッチ数の下からの評価式  $F_n \geq \phi^{n-2}$  を用いると次の評価式を得る。

**Theorem 3.3**  $\log C(T_{2m+4}) \geq (\log \phi)m^2$ , ここで  $\phi$  は黄金比  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$n!$  の上からの評価を使えば、粗いながら上からと下からの評価が得られる。

**Theorem 3.4**  $(\log \phi)m^2 \leq \log C(T_{2m+4}) \leq (\log(4m + 2))(2m^2 + 9m + 5)$

### 参考文献

- [ 1 ] 秋山仁, 中村義作, ゲームにひそむ数理-ゲームでみがこう!!数学的センス, 森北出版, 1998.



- [ 2 ] 片山真一, 久保智哉, 取る石に制限を付けた Wythoff の石とりゲーム, 第 15 回フィボナッチ研究集会, 2017.
- [ 3 ] 片山真一, 久保智哉, Wythoff の石とりゲーム 2, 第 16 回フィボナッチ研究集会, 2018.
- [ 4 ] 片山真一, 久保智哉, Wythoff の石取りゲームと Rayleigh の定理, 徳島科学史雑誌, Vol.37, 17–26, 2018.
- [ 5 ] 平山諦, 東西数学物語, 恒星社厚生閣, 1956.
- [ 6 ] 佐藤文広, 石取りゲームの数学-ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.
- [ 7 ] 福井昌則, アクティブ・ラーニングを促進する数理的パズル「碁石拾い」を題材とした iPad アプリケーションの開発, コンピュータ利用研究集会「コンピュータ&エデュケーション」 42, pp 55–58. 2017.
- [ 8 ] 福井昌則, 末續鴻輝, 鈴木顕, Complexity of "Goishi Hiroi", Proceedings of th 20th Anniversary of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs and Games, (JCDCG<sup>3</sup>), pp 131–132, 2017.

# Topological index associated with continued fractions

Takao Komatsu  
Department of Mathematics, School of Science  
Zhejiang Sci-Tech University  
Hangzhou 310018, China  
komatsu@zstu.edu.cn

## 1 Continued fractions

For any real number  $\alpha$  its continued fraction expansion

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

can be determined uniquely by the algorithm

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + 1/\alpha_1, & a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor, \\ \alpha_n &= a_n + 1/\alpha_{n+1}, & a_n &= \lfloor \alpha_n \rfloor \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denotes the floor function.

### 1.1 convergents

If  $\alpha$  is rational, then its continued fraction expansion may be expressed in two different ways. Namely,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (a_n \neq 1).$$

The  $n$ -th convergent of the continued fraction expansion  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  is denoted by  $p_n/q_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) and defined by

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

### 1.2 recurrence relations

It is well-known that  $p_n$ 's and  $q_n$ 's satisfy the recurrence relations:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 0), \quad p_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0,$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 0), \quad q_{-1} = 0, \quad q_{-2} = 1.$$

It is also known that

$$\begin{aligned} p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} &= (-1)^n, \\ p_{n-2}q_n - p_nq_{n-2} &= (-1)^{n-1}a_n. \end{aligned}$$

### 1.3 Generalized continued fractions

Any real number can be expressed as a generalized continued fraction expansion of the form

$$\alpha = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}$$

In this talk, we assume that all numbers  $a_0, a_1, a_2, \dots$  and  $b_1, b_2, \dots$  are positive integers. The  $n$ -th convergent  $p_n/q_n$  is given by

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}}}$$

Here,  $p_n$  and  $q_n$  satisfy the recurrence relation:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} \quad (n \geq 2), & p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + b_1, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \quad (n \geq 2), & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1. \end{aligned}$$

Notice that the expression of the generalized continued fraction expansion is not unique, and  $p_n$  and  $q_n$  are not necessarily coprime.

## 2 Topological indices

The concept of the *topological index* was first introduced by Haruo Hosoya in 1971 [3]. As more different types of topological indices have been discovered in chemical graph theory (e.g., see [1]), the first topological index is also called *Hosoya index* or the *Z index* nowadays. Topological indices are used for example in the development of quantitative structure-activity relationships (QSARs) in which the biological activity or other properties of molecules are correlated with their chemical structure. The integer  $Z := Z(G)$  is the sum of a set of the numbers  $p(G, k)$ , which is the number of ways for choosing  $k$  disjoint edges from  $G$ . By using the set of  $p(G, k)$ , the topological index  $Z$  is defined by

$$Z = \sum_{k=0}^m p(G, k).$$

The topological index is closely related to Fibonacci  $F_n$  [4] and related numbers [5]. For the path graph  $S_n$ , we have  $Z(S_n) = F_{n+1}$ , where  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $F_0 = 0$  and

$F_1 = 1$ . For the monocyclic graph  $C_n$ , we have  $Z(C_n) = L_n$ , where  $L_n$  is the Lucas number, defined by  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) with  $L_0 = 2$  and  $L_1 = 1$ .

In *Hosoya, 2007*, it is shown that for  $n \geq 1$

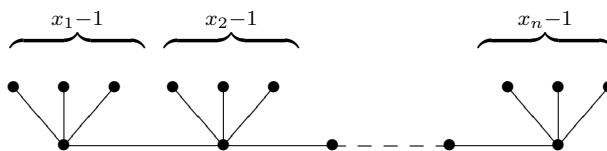
$$Z(C_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})) = p_{n-1}, \quad (1)$$

where

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1}}}}$$

with  $\gcd(p_{n-1}, q_{n-1}) = 1$ ,  $a_i \geq 1$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), where  $C_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is the *caterpillar graph*.

In Graph theory, a caterpillar graph (or tree), denoted by  $C_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , is a tree in which all the vertices are within distance 1 of a central path.

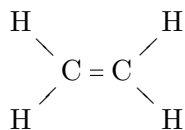


This corresponds to the simple continued fraction expansion

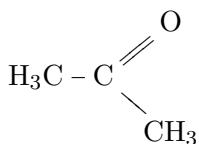
$$x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots + \frac{1}{x_n}}}$$

### 3 Double bonds

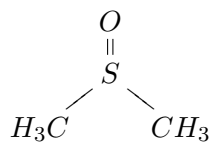
We explain double bonds in order to understand the structure of the sequence  $\{u_n\}_{n \geq 0}$ , satisfying the three term recurrence relation  $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ . In Chemistry, *double bonds* are chemical bonds between two chemical elements involving four bonding electrons instead of the usual two, and found in ethylene (carbon-carbon double bond C=C), acetone (carbon-oxygen double bond C=O), dimethyl sulfoxide (sulfur-oxygen double bond S=O), diazene (nitrogen-nitrogen double bond N=N) and so on.



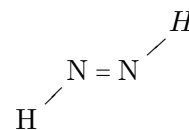
ethylene



acetone

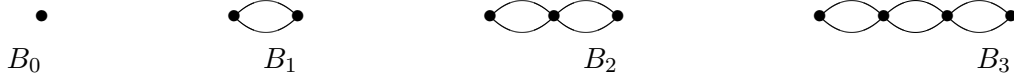


dimethyl sulfoxide



diazene

Though there does not seem to exist any concrete example, we shall consider the connected graph of double bonds as  $B_n$ .



Then the topological index of  $B_n$  coincides with the Jacobsthal number, whose sequence is given by

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, \dots$$

([10, A001045]).

**Theorem 1.** For  $n \geq 0$

$$Z(B_n) = J_{n+2},$$

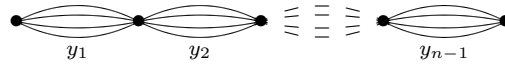
where  $J_n$  are the Jacobsthal numbers defined by

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad \text{with} \quad J_0 = 0 \quad \text{and} \quad J_1 = 1.$$

Theorem 1 is a special case of the main result in the later section. Theorem 1 holds for small  $n$  by the following table.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$Z(B_n)$
$p(B_0, k)$	1			1
$p(B_1, k)$	1	2		3
$p(B_2, k)$	1	4		5
$p(B_3, k)$	1	6	4	11

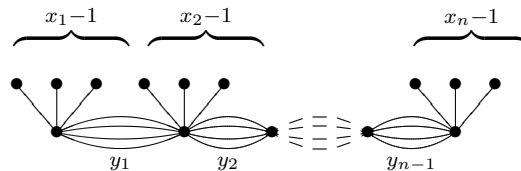
In Mathematics, define a *bond graph* denoted by  $B_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ , a connected graph with bonds order  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , where  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  are positive integers.



If  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 1$ ,  $S_n = B_n(1, 1, \dots, 1)$  is the path graph. If  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 2$ ,  $B_n = B_n(2, 2, \dots, 2)$  yields Jacobsthal numbers in its topological indices above. Similarly, if  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = b$ ,  $B_n(b, b, \dots, b)$  is related with the number  $u_n$ , satisfying the three term recurrence relation  $u_n = u_{n-1} + bu_{n-2}$  ( $n \geq 3$ ) with  $u_1 = b$  and  $u_2 = b + 1$ . In fact, we shall discuss more general cases in the later section.

Now, we introduce a combined graph of the caterpillar graph and the bond graph as their generalization.

*Caterpillar-bond graph*  $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$



This graph will correspond to the general continued fraction

$$x_1 + \frac{y_1}{x_2 + \frac{y_2}{x_3 + \dots + \frac{y_{n-1}}{x_n}}}.$$

Our main result can be stated as follows.

**Theorem 2.** For  $n \geq 1$ ,

$$Z(D_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1})) = p_{n-1}.$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

*Remark.* Notice that

$$\begin{aligned} D_n(2, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}) \\ = D_{n+1}(1, 1, x_2, \dots, x_n; 1, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

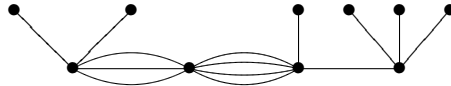
$$\begin{aligned} D_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 2; y_1, \dots, y_{n-1}) \\ = D_{n+1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 1, 1; y_1, \dots, y_{n-1}, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Since

$$\dots + \frac{b}{1 + \frac{1}{1}} = \dots + \frac{b}{2}$$

with two continued fraction expansions of  $p/q$  and  $p/(p-q)$  ( $p > q$ ), we can recognize the relations (2) and (3), and their topological indices are the same.

**Example.** For example, the caterpillar-bond graph  $D_4(3, 1, 2, 4; 3, 4, 1)$  is given by the following.



Since

$$3 + \frac{3}{1 + \frac{4}{2 + \frac{1}{4}}} = \frac{102}{25},$$

the topological index is calculated as  $Z(D_4(3, 1, 2, 4; 3, 4, 1)) = 102$ .

### 3.1 More applications

Using the continued fraction expansion, we can compute the topological index of the graph by Theorem 2.

On the other hand, we can constitute the graph (without any ring) whose topological index is given. For example, we shall find the graphs whose topological index are 17. Then, concerning the continued fractions we get

$$\begin{aligned}
 17, \quad \frac{17}{2} &= 8 + \frac{1}{2}, & \frac{17}{3} &= 5 + \frac{2}{3}, & \frac{17}{4} &= 4 + \frac{1}{4}, & \frac{17}{5} &= 3 + \frac{2}{5}, & \frac{17}{6} &= 2 + \frac{5}{6}, \\
 \frac{17}{7} &= 2 + \frac{3}{7}, & \frac{17}{8} &= 2 + \frac{1}{8}, & \frac{17}{9} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}, & \frac{17}{10} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}}, & \frac{17}{11} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{6}}, \\
 \frac{17}{12} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}, & \frac{17}{13} &= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}, & \frac{17}{14} &= 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}, & \frac{17}{15} &= 1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}, \\
 \frac{17}{16} &= 1 + \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

If we allow (2) and (3), we still have different expressions with the same value. For example,

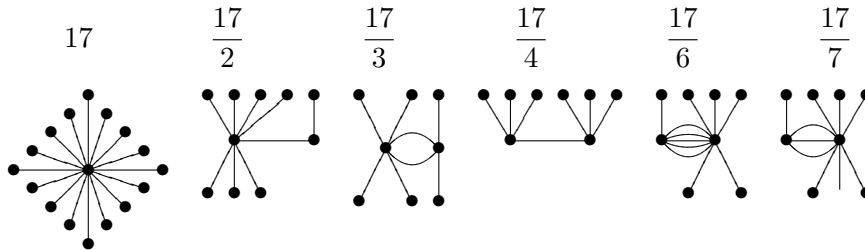
$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

and

$$\frac{17}{14} = 1 + \frac{3}{14} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}.$$

However, the graph structures of  $\frac{17}{3}$  and  $\frac{17}{14}$  are essentially the same.

It is similar for  $\frac{17}{q}$  and  $\frac{17}{17-q}$ . Therefore, the essentially different graphs whose topological indices are equal to 17 are given as follows.



Notice that other continued fraction expansions are the essentially the same as one of the above 6 graphs. Namely,

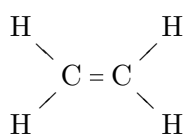
$$\begin{aligned} 17 &\sim \frac{17}{16}, & \frac{17}{2} &\sim \frac{17}{8} \sim \frac{17}{9} \sim \frac{17}{15}, & \frac{17}{3} &\sim \frac{17}{5} \sim \frac{17}{12} \sim \frac{17}{14}, \\ \frac{17}{4} &\sim \frac{17}{13}, & \frac{17}{6} &\sim \frac{17}{11}, & \frac{17}{7} &\sim \frac{17}{10} \end{aligned}$$

## 4 Examples in chemistry

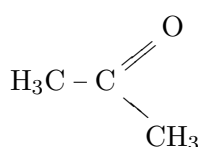
Ethylene, acetone (or dimethyl sulfoxide) and diazene correspond to the continued fraction expansions

$$3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}, \quad 3 + \frac{2}{1} = \frac{5}{1} \quad \text{and} \quad 2 + \frac{2}{2} = \frac{6}{2},$$

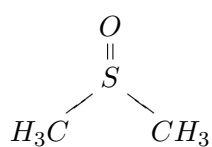
respectively. These topological indices are given by 11, 5 and 6, respectively. In fact, the structure of diazene can be explained by Pell-Lucas number  $Q_3$ .



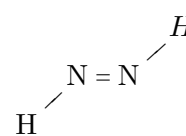
ethylene



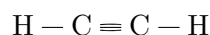
acetone



dimethyl sulfoxide



diazene



Acetylene can be written as  $D_4(1, 1, 1, 1; 1, 3, 1)$ ,  $D_3(2, 1, 1; 3, 1)$  (or  $D_3(1, 1, 2; 1, 3)$ ) or  $D_2(2, 2; 3)$ . Then the corresponding continued fractions are

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{5}, \quad 2 + \frac{3}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{2} \quad \text{or} \quad 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

In any case its topological index is given by 7.

## 5 Awful graphs

Caterpillar-bond graphs associated with general continued fractions are not only mere extensions of caterpillar graphs with simple continued fractions, but also yield more availabilities. For example, by using several expressions of the same value by general continued fractions

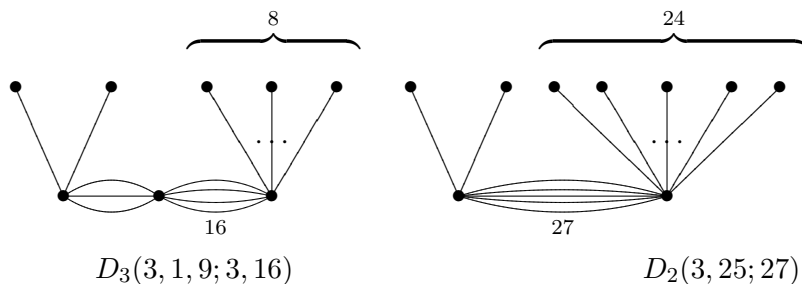
$$3 + \frac{3}{1 + \frac{4}{2 + \frac{1}{4}}} = 3 + \frac{3}{1 + \frac{16}{9}} = 3 + \frac{27}{25} = \frac{102}{25},$$



the topological indices are given by

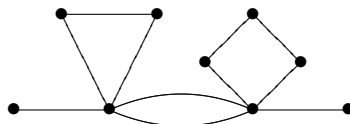
$$\begin{aligned} Z(D_4(3, 1, 2, 4; 3, 4, 1)) &= Z(D_3(3, 1, 9; 3, 16)) \\ &= Z(D_2(3, 25; 27)) = 102. \end{aligned}$$

Although the appearance may be bad, the techniques used here are useful for calculating the topological index of more complex graphs.



## 6 More complicated case

Consider the following graph with one double bond and two cycles.



This will correspond to a so-called *branched continued fraction*

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$$

This can be written as the graph  $D_4(1, C_3, C_4, 1; 1, 2, 1) := G$ , which continued fraction expansion is

$$1 + \frac{1}{c_3 + \frac{2}{c_4 + \frac{1}{1}}}$$

Now,  $C_3$  and  $C_4$  can be transformed into the caterpillar-bond graphs  $D_2(1, 2; 2)$  and  $D_3(1, 1, 2; 2, 1)$ , respectively. Their continued fractions are

$$1 + \frac{2}{2} = \frac{4}{2} := c_3 \quad \text{and} \quad 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3} := c_4,$$

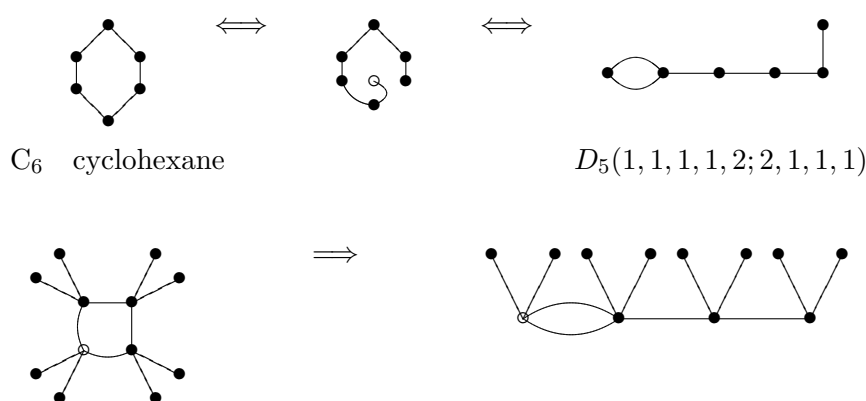
respectively. Hence, the original continued fraction can be calculated as

$$1 + \frac{1}{c_3 + \frac{2}{c_4 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{2} + \frac{2}{\frac{7}{3} + \frac{1}{1}}} = \frac{72}{56}.$$

Therefore, the topological index of the given graph is 72. Indeed,

$$\begin{aligned} Z(G) &= p(G, 0) + p(G, 1) + p(G, 2) + p(G, 3) + p(G, 4) \\ &= 1 + 11 + 31 + 25 + 4 = 72. \end{aligned}$$

There exist some techniques for transformations. For example,



## References

- [1] J. Devillers and A. T. Balaban, *Topological indices and related descriptors in QSAR and QSPR*, Boca Raton, CRC Press, 2000. ISBN 90-5699-239-2.
- [2] I. Gutman and O. E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer, Berlin, 1986.
- [3] H. Hosoya, *Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons*, Bull. Chemical Soc. Japan, **44.9** (1971), 2332–2339. DOI:10.1246/bcsj.44.2332
- [4] H. Hosoya, *Topological index and Fibonacci numbers with relation to Chemistry*, Fibonacci Quart. **11.3** (1973), 255-266.
- [5] H. Hosoya, *Mathematical meaning and importance of the topological index Z*, Croat. Chem. Acta (CCACAA) **80.2** (2007), 239–249.
- [6] H. Hosoya, *Continuant, caterpillar, and topological index Z. Fastest algorithm for degrading a continued fraction*, Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **58.1** (2007), 15–28. available at <http://hdl.handle.net/10083/35234>

- [7] H. Hosoya, *Continuant, caterpillar, and topological index Z. II. Novel identities involving Fibonacci, Lucas, and generalized Fibonacci numbers*, Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **58.2** (2008), 11–20. available at <http://hdl.handle.net/10083/35236>
- [8] H. Hosoya, *Continuant, caterpillar, and topological index Z. III. Graph-theoretical algorithm for and interpretation of solving linear Diophantine equations*, Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **60.2** (2010), 17–27. available at <http://hdl.handle.net/10083/49184>
- [9] J. March, *Advanced Organic Chemistry: Reactions, Mechanisms, and Structure*, (3rd ed.), New York, Wiley, 1985.
- [10] N. J. A. Sloane, *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, available at [oeis.org](http://oeis.org), (2019).

# Parastichy numbers 決定法による充填画像評価

根岸利一郎<sup>1</sup>, 関口久美子<sup>1</sup>, 船崎明美<sup>2</sup>, 内田正哉<sup>1</sup>,  
<sup>1</sup>埼玉工業大学, <sup>2</sup>株式会社ビジネスサポート

**概要:** Parastichy numbers はひまわりの種の連なりによるらせん数を特徴づける数値として知られ, シミュレーションからも得られる。任意の開度による矩形平面内点充填の Parastichy numbers はフーリエ変換法によって直接求めることができる。その任意開度による充填画像から求まる Parastichy numbers には一般フィボナッチ数が混在する。この数量は画像乱れとどのような関係があるかを検討した。

## 1. はじめに

図 1 にヒマワリの小花の並んだ典型的な画像を示す。小花はらせん状に連なり, 白い円に沿ったらせん数はそれぞれの四角内に示したような値の Parastichy pair となり, その数値全体は Parastichy numbers と言われる。この数は, 何世紀にもわたって研究者の注目を集めてきた (Vogel, 1979)。ヒマワリの種のらせんは, 渦巻き形成を含む葉序のメカニズムとして Hofmeister (1868) が体系的に記述している。Turing は, ヒマワリの種のパターンを描き, フィボナッチ葉序を研究した (Turing, 1952; Turing Archive, 1965)。Douady と Couder (1992) は磁場の影響下で強磁性流体の滴でフィボナッチらせんをうまく得ている。Dunlap (1997) は, フィボナッチ数の基本的性質と, 数学, コンピュータサイエンス, 物理学, 生物学のさまざまな分野への応用を強調した。根岸ら (2007) は画像処理への応用を提案した。ここでは parastichy pair の応用を検討する。

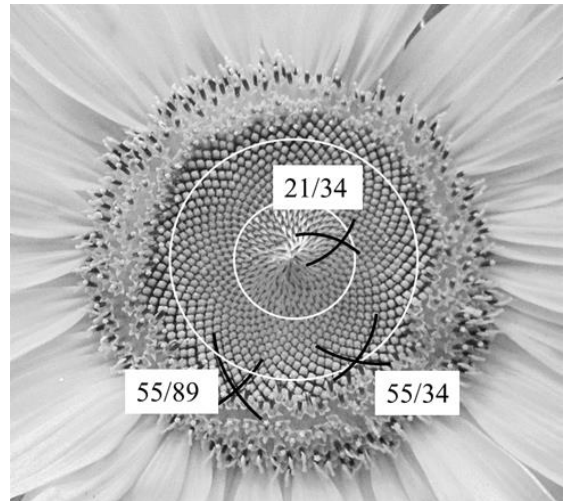
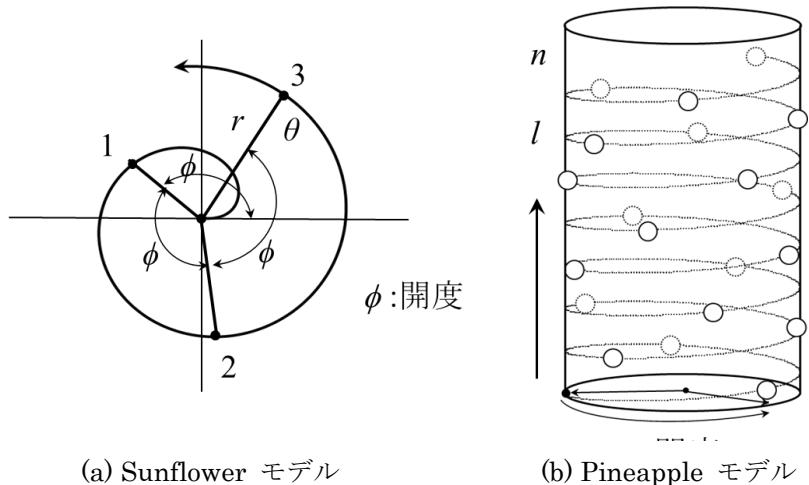


図 1 ヒマワリの種のらせんによる Parastichy pair。

## 2. Parastichy numbers と開度

Adler (1974) は, 様々な開度での数列を決定する式を提案している。Jean (2009) は, Adler の方式を用いて開度と数列の関係性を要約した。表 1 は, アドラーの方法を用いて様々な開度で計算された数列を示す。表 1 において, フィボナッチ数列を  $F$ , ルーカス数列を  $L$ , 一般化されたフィボナッチ数列を  $G$  とする (Koshy, 2001)。この数列中の 2 数が Parastichy pair となる。

Sunflower-モデル (図 2 a) において開度が黄金角  $\phi_r$  ( $137.507764 \dots^\circ$ ) にほぼ等しい  $137.51^\circ$  に対する Parastichy numbers はフィボ



(a) Sunflower モデル

(b) Pineapple モデル

図 2 シミュレーションモデル

ナッチ数列 ( $F$ ) となる (表 1)。開度が  $99.5^\circ$  の場合の Parastichy numbers はルーカス数列 ( $L$ ) を与える。一般化されたフィボナッチ数列 ( $G$ ) は、 $77.96^\circ$  および  $64.08^\circ$  などの開度で現れる。これら Parastichy numbers と開度との関係は Pineapple モデル (図 2b) でも同様である。

表 1. 各種開度と Parastichy number としてのフィボナッチ数

divergence angle	Parastichy number (sequences)
$137.51^\circ$	$F, G(1,2): 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$
$99.50^\circ$	$L, G(1,3): 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \dots$
$77.96^\circ$	$G(1,4): 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254, 411, 665, 1076, \dots$
$64.08^\circ$	$G(1,5): 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, 118, 191, 309, 500, 809, 1309, \dots$
$54.40^\circ$	$G(1,6): 1, 6, 7, 13, 20, 33, 53, 86, 139, 225, 364, 589, 953, 1542, \dots$
$47.25^\circ$	$G(1,7): 1, 7, 8, 15, 23, 38, 61, 99, 160, 259, 419, 678, 1097, 1775, \dots$
$151.14^\circ$	$G(2,5): 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898, 1453, \dots$
$158.15^\circ$	$G(2,7): 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, 280, 453, 733, 1186, 1919, \dots$
$162.42^\circ$	$G(2,9): 2, 9, 11, 20, 31, 51, 82, 133, 215, 348, 563, 911, 1478, 2385, \dots$
$68.75^\circ$	$2 \times G(1,2): 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, 1220, \dots$

### 3. 画像の乱れ評価

図 3 は Pineapple-モデルにおいて、開度  $\phi$  が  $137.3^\circ$ ,  $137.4^\circ$ , 黄金角  $\phi_\tau$  ( $137.507764\dots^\circ$ ),  $137.8^\circ$  それぞれのときの点充填の様子を示す。対象領域は、各図の上部矩形内 256 点とした。この画像内位置データに離散フーリエ変換 (以後 DFT) の方法を適用した結果を図 4 に示す (Negishi ら, 2017, 2019)。各図に対応する 2 つの数字は、求めた Parastichy pair としての空間周波数の最大ピークと 2 番目に大きなピーク値である。それぞれの 2 ピーク値の小さい数に対する大きな数の比は図 4 の四角内数値のように求まる。点分布の偏りの最も小さい図 4 c) の Parastichy pair はフィボナッチ数列 2 数となってその比はほぼ黄金比となる。偏りの目立つ a) の比は黄金比から大きく外れる。このことから Parastichy pair の 2 数を求めれば画像の乱れを評価できる可能性がある。さらに図 3 .(b) と (d) の乱れの差異は目視では区別できないが、DFT の方法で求めた Parastichy pair であれば乱れ方が比の違いとして定量的に識別できる。

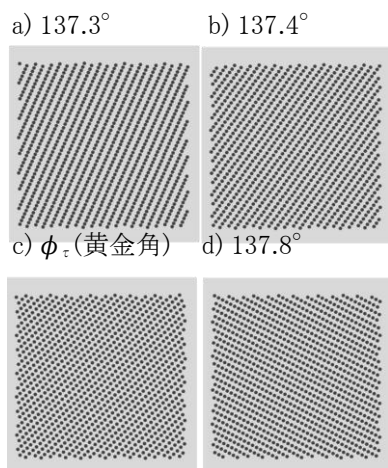


図 3. 黄金角付近の開度による分布の違い。対象領域は上部 256 点。

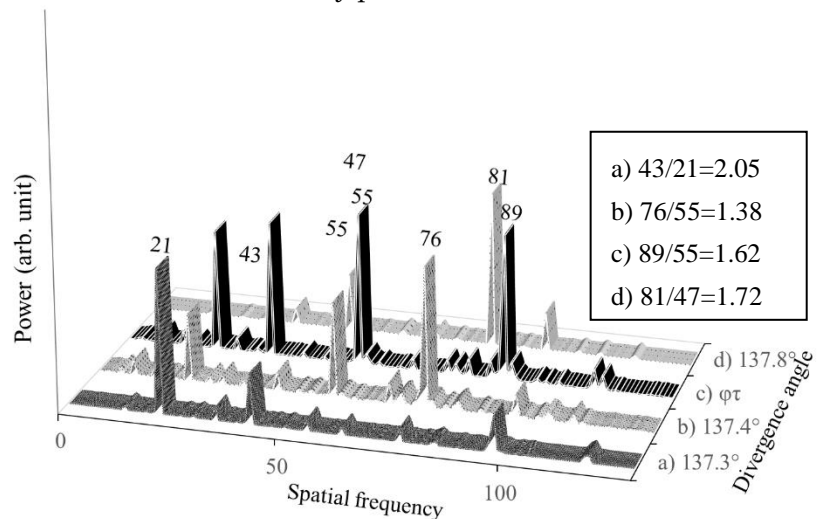


図 4. 図 3 のフーリエ変換によって求めた Parastichy 数とその比。

## 4. 応用

### 4.1 パイナップルの鱗片

実在のパイナップル鱗片に上記 DFT の方法を適用してみよう。図 5 はパイナップルを立てて  $10^\circ$  ずつ回転して撮影した画像を重ね合わせた合成画像である。この画像の各鱗片の中央付近を点として上下端を除いた 48 片について画像内位置情報を抽出する。その位置情報に DFT の方法を適用して得られた結果が図 6 である。図 5 の目視で確認できる Parastichy pair の 8 と 13 が得られる。



図 5.  $10^\circ$  ずつ回転させた撮影で作った合成画像

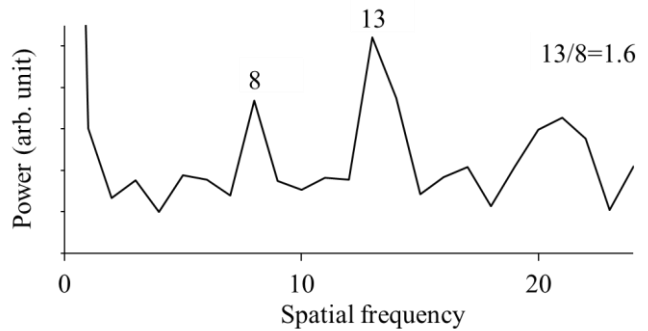


図 6. DFT で得られた結果

#### 4.2 ヒマワリの種

図 7 は直径が 0.3m にもなるロシアひまわりである。この画像内の白円に沿った種 512 点からの位置情報を抽出し、それに DFT の方法を適用した結果が図 8 の細線である。変換結果には多くの空間周波数を示すピークがあり、個々の生きた種子の間隔周期が多数存在することを反映している。図中の破線はコンボリューションの結果を示す。コンボリューション関数はガウス関数とローレンツ関数の和をとる方法を採用した。得られた 2 数の空間周波数の比  $214/150=1.43$  は黄金比に近いが少し小さい。この比は種子が登頂花全体にまばらに分布している事実に符合する。この結果はここに提案するフーリエ変換法が個々の種子位置の乱れとしての評価に役立つことを示す。

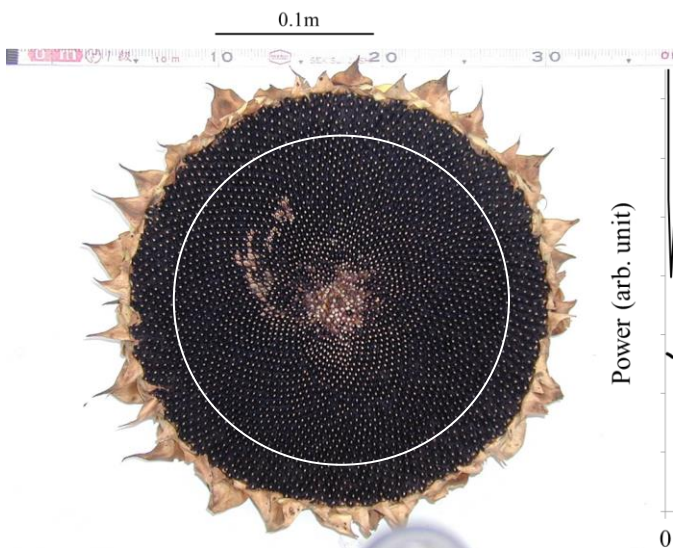


図 7. ロシアヒマワリの種の並び

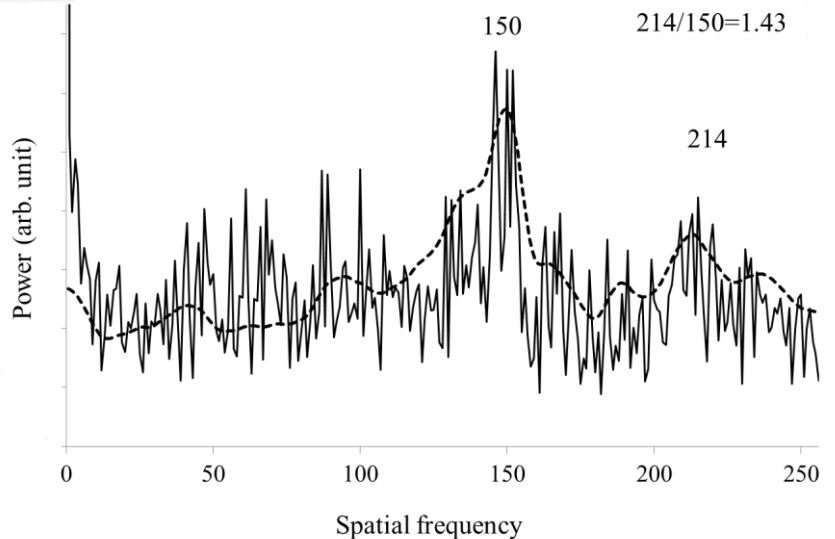


図 8. DFT で得られた結果の細線とコンボリューション結果の破線

#### 4.3 砂漠の砂丘

図 9 はサハラ砂漠の砂丘の連なりである。この砂丘の一つ一つを点として点線四角形内 256 点の画像上の位置情報を抽出する。その抽出点に DFT の方法を適用すると図 10 の細線が得られる。この結果に

対しても空間周波数を特定するためにコンボリューションを施す。その結果の破線から、Parastichy pairの数値として第1ピークは71，第2ピークは111が特定され，両者の比として1.56が得られる。

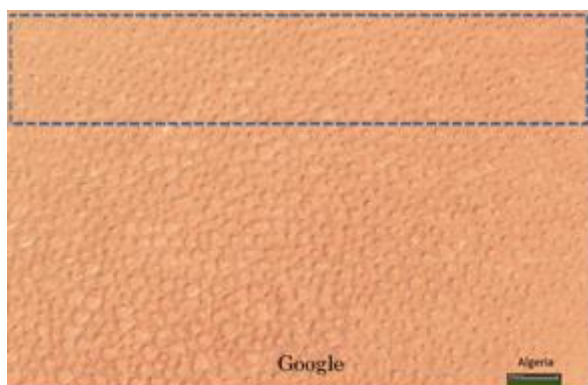


図9. サハラ砂漠の砂丘連なり

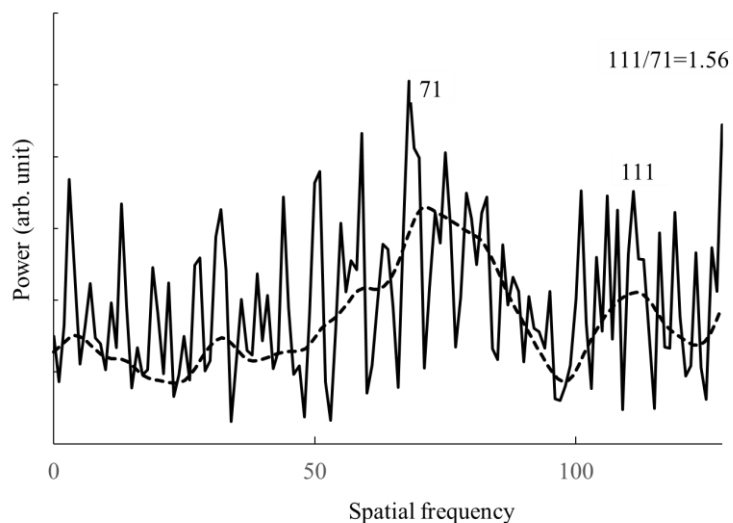


図10. 得られた周波数変化(細線)とコンボリューション結果(破線)

### 3. まとめ

画像乱れを評価するために離散フーリエ変換を利用する方法をパイナップル鱗片とヒマワリの種および砂漠の砂丘に応用した。パイナップル鱗片の応用からは目視と同じParastichy pairが得られた。ヒマワリの種から決定されたParastichy pair 2数の比は1.43，砂漠の砂丘からのそれは1.56となり砂丘のほうが黄金比に近い値だった。これらの事実は黄金比とParastichy pair 2数の比の差が特定事象の画像内での乱れ方の評価指標となる可能性を示す。

### Referenses;

- Adler, I. (1974) A model of contact pressure in phyllotaxis, *J. Theor. Biol.*, 45, 1-79.
- Douady, S. and Couder, Y. (1992) Phyllotaxis as a Physical self-Organized Growth Process, *Phys. Rev. Lett.*, 68, 2098-2100.
- Dunlap, R. A. (1997) *The golden ratio and Fibonacci numbers*, Word Scientific Publishing, New Jersey.
- Hofmeister, W. (1868) *Handbuch der Physiologischen Botanik*, Engelmann, 437-463.
- Jean, R. V. (2009) *Phyllotaxis*, Cambridge University Press, New York.
- Negishi, R., *et.al.* (2017), Determining Parastichy Numbers Using Discrete Fourier Transforms, *Forma*, 32, pp.19-27.
- Negishi, R. (2019), *Asymmetry in Plants*, (eds. Bir, B., *et.al.*), CRC press, chap.16.
- Turing, A. M. (1952) Morphogen theory of phyllotaxis, in Saunders, P. T. (Ed., 1992, *Collected Works of A. M. Turing: Morphogenesis*, North-Holland, Amsterdam.
- Vogel, H. (1979) A better way to construct the sunflower head, *Math. Biosci.*, 44, 179-189.

# フィボナッチ記数法に基づくコラッツの問題

岩淵 勇樹

2019-08-23

## Abstract

コラッツの問題の増加関数、減少関数、減少条件をフィボナッチ記数法に基づく関数にしたところ、必ず有限回の操作で 1 に到達するであろうことがわかった。

## 1 定義

$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  とおく。

$$\text{odd}_F(n) = \lfloor \Phi^2 n \rfloor - 1 \quad (1)$$

$$\text{even}_F(n) = \lfloor \Phi^2(n+1) \rfloor - 2 \quad (2)$$

$\text{odd}_F(m) = n$  となるような  $m$  が存在するときに  $n$  をフィボナッチ奇数、 $\text{even}_F(m) = n$  となるような  $m$  が存在するときに  $n$  をフィボナッチ偶数と呼ぶことにする。

このとき、フィボナッチ版コラッツの問題における操作  $c_F$  を以下に定義する。

$$c_F(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+1}{\Phi} \right\rfloor & (n \text{ がフィボナッチ偶数}) \\ \text{odd}_F(n) - 1 & (n \text{ がフィボナッチ奇数}) \end{cases} \quad (3)$$

## 2 命題

$$c_F^5(\text{odd}_F(n)) = n - 1 \quad (4)$$

および

$$\text{odd}_F(n) \geq n - 1 \quad (5)$$

より、フィボナッチ奇数に 5 回  $c_F$  を適用することにより必ず減少し、有限回の操作で 1 に到達する。



# ペル方程式から得られる数列の生成関数が 整数値をとる有理数の必要十分条件について

津野 祐司 (長野県飯山高等学校)

ABSTRACT. D.S.Hong と P. Pongsriiam によってフィボナッチ数 (またはリュカ数) の生成関数が整数値をとる有理数の必要十分条件が与えられた. 我々は、彼らと同様の結果がペル方程式の整数解から作られる数列の生成関数についても得られる事を示す.

## 1. 先行研究と主結果

本研究は第 15 回日本フィボナッチ協会研究集会における中村滋先生 [3] の講演をもとに考察したものである.

フィボナッチ数列  $\{F_n\}_{n \geq 0}$  は, 初期条件  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , 漸化式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

によって定まる数列である. この数列の生成関数は

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

である. 一方, リュカ数列  $\{L_n\}_{n \geq 0}$  は, 初期条件  $L_0 = 2, L_1 = 1$ , 漸化式

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

によって定まる数列である. この数列の生成関数は

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

である.

D.S.Hong [2] はフィボナッチ数列の生成関数  $F(x)$  とリュカ数列の生成関数  $L(x)$  に関して

$$\text{もし, } x = \frac{F_n}{F_{n+1}} (n \geq 0) \text{ ならば, } F(x) \in \mathbb{Z},$$

$$\text{もし, } x = \frac{F_n}{F_{n+1}} (n \geq 0) \text{ または } x = \frac{L_n}{L_{n+1}} (n \geq 0) \text{ ならば, } L(x) \in \mathbb{Z}.$$

となることを発見し, これらの生成関数が整数値をとるのはこれらの場合に限るかという問題を提起し, P. Pongsriiam [4] が以下のようにそれぞれの生成関数に対して整数値をとる有理数の必要十分条件を求めた.

**Theorem 1.1.**(Hong · Pongsriiam 2017)  $x$  を有理数とする. フィボナッチ数列の生成関数  $F(x)$  に対して,  $F(x) \in \mathbb{Z}$  となる必要十分条件は,

$$x = \frac{F_n}{F_{n+1}} (n \geq 0) \text{ または } x = -\frac{F_{n+1}}{F_n} (n \geq 1)$$

である.

**Theorem 1.2.**(Hong · Pongsriiam 2017)  $x$  を有理数とする. リュカ数列の生成関数  $L(x)$  に対して,  $L(x) \in \mathbb{Z}$  となる必要十分条件は,

$$x = \frac{F_n}{F_{n+1}}, -\frac{L_{n+1}}{L_n}, \frac{L_n}{L_{n+1}} (n \geq 0) \text{ または } -\frac{F_{n+1}}{F_n} (n \geq 1)$$

である.

上の定理の証明には, フィボナッチ数とリュカ数に関するいくつかの公式が用いられた.

非負整数  $n, m$  に対し,

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n (n \geq 1), \\ L_nF_m &= F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} (n \geq m), \\ 5F_nF_m &= L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m} (n \geq m), \\ F_nL_m - L_nF_m &= 2(-1)^m F_{n-m} (n \geq m). \end{aligned}$$

さらに, フィボナッチ数とリュカ数に関しての次に紹介する定理は上の定理の証明において重要である.

**Theorem 1.3.** 非負整数の組  $(x, y)$  が

$$5x^2 - y^2 = \pm 4$$

を満たすならば, ある 0 以上の整数  $n$  が存在して,  $x = F_n, y = L_n$  となる. さらに任意の 0 以上の整数  $n$  に対して,

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^n$$

が成り立つ.

ここまでに紹介した先行研究ではペル方程式

$$5x^2 - y^2 = \pm 4$$

が重要であったが, 本研究ではペル方程式

$$x^2 - my^2 = \pm 1 \quad (m \text{ は平方数でない自然数})$$

を考える. まず, 方程式  $x^2 - my^2 = \pm 1$  の最小解を  $(a, b)$  とする. ここで最小解とは, 任意の正整数解  $(x, y)$  に対して,  $a \leq x$  かつ  $b \leq y$  となる正整数解  $(a, b)$  のことである. また, 最小解は必ず存在する. このとき, 0 以上の整数  $n$  に対して,

$$x_n = \frac{(a + b\sqrt{m})^n + (a - b\sqrt{m})^n}{2} \quad (1)$$

$$y_n = \frac{(a + b\sqrt{m})^n - (a - b\sqrt{m})^n}{2\sqrt{m}} \quad (2)$$

とおくと,  $(x_n, y_n)$  は, ペル方程式の整数解であり, すべての非負整数解はこれらによって与えられることが知られている. (例えば [5, p214, 定理 3.8.]

ここで,  $a^2 - mb^2 = 1$  ならば

$$x_n = L_n^+, y_n = F_n^+$$

とかき, 一方,  $a^2 - mb^2 = -1$  ならば

$$x_n = L_n^-, y_n = F_n^-$$

とかくことにする. このように数列  $\{L_n^+\}_{n \geq 0}$ ,  $\{L_n^-\}_{n \geq 0}$ ,  $\{F_n^+\}_{n \geq 0}$ ,  $\{F_n^-\}_{n \geq 0}$  を定めれば, 数列  $\{L_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数を  $L^+(x)$  とかくと,

$$L^+(x) = \frac{1 - ax}{1 - 2ax + x^2},$$

数列  $\{L_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数を  $L^-(x)$  とかくと,

$$L^-(x) = \frac{1 - ax}{1 - 2ax - x^2},$$

数列  $\{F_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数を  $F^+(x)$  とかくと,

$$F^+(x) = \frac{bx}{1 - 2ax + x^2},$$

数列  $\{F_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数を  $F^-(x)$  とかくと,

$$F^-(x) = \frac{bx}{1 - 2ax - x^2}$$

で与えられる. これらのことは非負整数  $n$  に対して, (1), (2) より

$$F_{n+2}^+ = 2aF_{n+1}^+ - F_n^+ \quad (3)$$

$$F_{n+2}^- = 2aF_{n+1}^- + F_n^- \quad (4)$$

$$L_{n+2}^+ = 2aL_{n+1}^+ - L_n^+ \quad (5)$$

$$L_{n+2}^- = 2aL_{n+1}^- + L_n^- \quad (6)$$

が成り立つことから, ただちに分かる. さらにこれらの生成関数を級数とみたときそれらの収束半径はすべて

$$\frac{1}{a + b\sqrt{m}}$$

である.

以下, 本研究の主結果を述べる.

**Theorem 1.4.** 数列  $\{L_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $L^+(x)$  が整数値となる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}, \frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}, \frac{L_{n+1}^+}{L_n^+} \quad (n \geq 0)$$

または

$$\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+} \quad (n \geq 1)$$

でこれらに限る.

**Theorem 1.5.** 数列  $\{L_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $L^-(x)$  が整数値となる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}, \frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}, -\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-} \quad (n \geq 0)$$

または

$$-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} \quad (n \geq 1)$$

でこれらに限る.

**Theorem 1.6.** 数列  $\{F_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $F^+(x)$  が整数値となる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+} \quad (n \geq 0)$$

または

$$\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+} \quad (n \geq 1)$$

でこれらに限る.

**Theorem 1.7.** 数列  $\{F_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $F^-(x)$  が整数値となる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-} \quad (n \geq 0)$$

または

$$-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} \quad (n \geq 1)$$

でこれらに限る.

主結果から次の系を得る.

**Corollary 1.8.** 数列  $\{L_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $L^+(x)$  を級数とみると収束半径内で整数値をとる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+} \quad (n \geq 0)$$

でこれらに限る.

**Corollary 1.9.** 数列  $\{L_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $L^-(x)$  を級数とみると収束半径内で整数値をとる有理数  $x$  は

$$\frac{F_{2n}^-}{F_{2n+1}^-}, \frac{L_{2n+1}^-}{L_{2n+2}^-} \quad (n \geq 0)$$

でこれらに限る.

**Corollary 1.10.** 数列  $\{F_n^+\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $F^+(x)$  を級数とみると収束半径内で整数値をとる有理数  $x$  は

$$\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+} \quad (n \geq 0)$$

でこれらに限る.

**Corollary 1.11.** 数列  $\{F_n^-\}_{n \geq 0}$  の生成関数  $F^-(x)$  を級数とみると収束半径内で整数値をとる有理数  $x$  は

$$\frac{F_{2n}^-}{F_{2n+1}^-} \quad (n \geq 0)$$

でこれらに限る.

これらの系は数列  $\{L_n^+\}_{n \geq 0}$ ,  $\{L_n^-\}_{n \geq 0}$ ,  $\{F_n^+\}_{n \geq 0}$ ,  $\{F_n^-\}_{n \geq 0}$  がすべて単調増加数列であることと等式 (1) (2) からわかる.

**Remark 1.12.**  $a, b$  を正の整数とし  $a$  は  $b$  の倍数とする. A. Bulawa と W. K. Lee は [1] において, 初期条件  $R_0 = 0, R_1 = 1$ , 漸化式

$$R_{n+2} = aR_{n+1} + bR_n$$

によって定まる数列  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  の生成関数を級数とみたときの収束半径内の整数値をとる有理数の必要十分条件を与えている. 彼らの研究は主に初期条件が  $R_0 = 0, R_1 = 1$  の場合を考察しているのに対して, 我々の研究は条件付きの初期条件が必ずしも  $R_0 = 0, R_1 = 1$  でない場合を主に考察しているといえるだろう.

## 2. 主結果の証明

主結果の証明をする前に, 準備として次の等式 (複合同順) が成り立つことを確認する.

$$F_{n-1}^{\pm} F_{n+1}^{\pm} - (F_n^{\pm})^2 = \frac{-(\pm 1)^{n-1}(a^2 + mb^2) + (\pm 1)^n}{2m} \quad (n \geq 1) \quad (7)$$

$$2L_{n-1}^{\pm} L_{n+1}^{\pm} = L_{2n}^{\pm} + (\pm 1)^{n-1} L_2^{\pm} \quad (n \geq 1) \quad (8)$$

$$F_n^{\pm} L_m^{\pm} - L_n^{\pm} F_m^{\pm} = (\pm 1)^m F_{n-m}^{\pm} \quad (n \geq m) \quad (9)$$

$$L_n^{\pm} F_m^{\pm} = \frac{F_{n+m}^{\pm} - (\pm 1)^m F_{n-m}^{\pm}}{2} \quad (n \geq m) \quad (10)$$

$$F_n^{\pm} F_m^{\pm} = \frac{L_{n+m}^{\pm} - (\pm 1)^m L_{n-m}^{\pm}}{2m} \quad (n \geq m) \quad (11)$$

$$L_{n+1}^{\pm} = aL_n^{\pm} + mbF_n^{\pm} \quad (n \geq 0) \quad (12)$$

$$F_{n+1}^{\pm} = aF_n^{\pm} + bL_n^{\pm} \quad (n \geq 0) \quad (13)$$

$$2(L_n^{\pm})^2 = L_{2n}^{\pm} + (\pm 1)^n \quad (n \geq 0) \quad (14)$$

$$2L_n^{\pm} L_{n+1}^{\pm} = L_{2n+1}^{\pm} + (\pm 1)^n a \quad (n \geq 0) \quad (15)$$

これらの等式は (1) と (2) から容易に示すことができる.

### 2.1. Proof of Theorem 1.4. まず,

$$L^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right), L^+\left(\frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}\right), L^+\left(\frac{L_{n+1}^+}{L_n^+}\right), \quad (n \geq 0)$$

と

$$L^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right) \quad (n \geq 1)$$

が整数となることを示す.

$n = 0$  のときは明らか.  $n \geq 1$  のとき, (3), (7) と  $a^2 - mb^2 = 1$  より

$$\begin{aligned}
L^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right) &= \frac{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - aF_n^+)}{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - 2aF_n^+) + F_n^{+2}} \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - aF_n^+)}{-F_{n+1}^+F_{n-1}^+ + F_n^2} \\
&\stackrel{(7)}{=} \frac{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - aF_n^+)}{b^2}
\end{aligned}$$

さらに,  $F_0^+ = 0, F_1^+ = b, F_{n+2}^+ = 2aF_{n+1}^+ - F_n^+$  より,  $F_n^+$  ( $n \geq 0$ ) は  $b$  の倍数であるから  $L^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right)$  は整数. 同じようにして, (3), (7) より

$$\begin{aligned}
L^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right) &= \frac{F_n^+(F_n^+ - aF_{n+1}^+)}{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - 2aF_n^+) + F_n^{+2}} \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{F_n^+(F_n^+ - aF_{n+1}^+)}{F_n^{+2} - F_{n+1}^+F_{n-1}^+} \\
&\stackrel{(7)}{=} \frac{F_n^+(F_n^+ - aF_{n+1}^+)}{b^2}
\end{aligned}$$

となり  $L^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right)$  は整数.

(5), (8), (12), (14) より,

$$\begin{aligned}
L^+\left(\frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}\right) &= \frac{L_{n+1}^+(L_{n+1}^+ - aL_n^+)}{L_{n+1}^+(L_{n+1}^+ - 2aL_n^+) + L_n^{+2}} \\
&\stackrel{(5)}{=} \frac{L_{n+1}^+(L_{n+1}^+ - aL_n^+)}{-L_{n+1}^+L_{n-1}^+ + L_n^{+2}} \\
&\stackrel{(8)(14)}{=} \frac{L_{n+1}^+(L_{n+1}^+ - aL_n^+)}{-mb^2} \\
&\stackrel{(12)}{=} \frac{-L_{n+1}^+F_n^+}{b}
\end{aligned}$$

これから,  $L^+\left(\frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}\right)$  は整数.

同じようにして (5), (8), (12), (14) より,

$$\begin{aligned}
L^+\left(\frac{L_{n+1}^+}{L_n^+}\right) &= \frac{L_n^+(L_n^+ - aL_{n+1}^+)}{L_{n+1}^+(L_{n+1}^+ - 2aL_n^+) + L_n^{+2}} \\
&\stackrel{(5)}{=} \frac{L_n^+(L_n^+ - aL_{n+1}^+)}{-L_{n+1}^+L_{n-1}^+ + L_n^{+2}} \\
&\stackrel{(8)(14)}{=} \frac{L_n^+(L_n^+ - aL_{n+1}^+)}{-mb^2} \\
&\stackrel{(12)}{=} \frac{L_n^+(mb^2L_n^+ + abmF_n^+)}{mb^2}
\end{aligned}$$

これから,  $F_n^+$  ( $n \geq 0$ ) は  $b$  の倍数であるから  $L^+(\frac{L_{n+1}^+}{L_n^+})$  は整数.  
次に, 有理数  $x$  に対して  $L^+(x) = k$  ( $k$  は整数) とすると  $x$  は

$$x = \frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}, \frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}, \frac{L_{n+1}^+}{L_n^+} \quad (n \geq 0)$$

か

$$x = \frac{F_{n+1}^+}{F_n^+} \quad (n \geq 1)$$

のいずれかになることを示す.

$k = 0$  のとき,

$$\frac{1 - ax}{1 - 2ax + x^2} = 0$$

より,

$$x = \frac{1}{a} = \frac{L_0^+}{L_1^+}$$

$k \neq 0$  のとき,

$$\frac{1 - ax}{1 - 2ax + x^2} = k$$

から

$$kx^2 + a(1 - 2k)x + k - 1 = 0$$

より

$$x = \frac{-a(1 - 2k) \pm \sqrt{a^2(1 - 2k)^2 - 4k(k - 1)}}{2k}$$

ここで  $x$  は有理数なので

$$a^2(1 - 2k)^2 - 4k(k - 1) = M^2$$

となる 0 以上の整数  $M$  が存在する. さらに,  $a^2 - mb^2 = 1$  から

$$M^2 - mb^2(2k - 1)^2 = 1$$

が成り立ち, (10) から, 任意の非負整数  $N$  に対して,  $F_{2N}^+ = 2L_N^+F_N^+$  となるので,  $M = L_{2n+1}^+$  となる非負整数  $n$  が存在し,  $b(2k - 1) = F_{2n+1}^+$  ( $n \geq 0$ ) または,  $b(2k - 1) = -F_{2n+1}^+$  ( $n \geq 1$ ). これから

$$k = \frac{F_{2n+1}^+ + b}{2b} \quad (n \geq 0)$$

または

$$k = \frac{-F_{2n+1}^+ + b}{2b} \quad (n \geq 1)$$

以上により

$$x = \frac{aF_{2n+1}^+ + bL_{2n+1}^+}{F_{2n+1}^+ + b} \quad (n \geq 0) \cdots (A),$$

$$x = \frac{aF_{2n+1}^+ - bL_{2n+1}^+}{F_{2n+1}^+ + b} \quad (n \geq 0) \cdots (B),$$

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^+ + bL_{2n+1}^+}{-F_{2n+1}^+ + b} \quad (n \geq 1) \cdots (C),$$

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^+ - bL_{2n+1}^+}{-F_{2n+1}^+ + b} \quad (n \geq 1) \cdots (D)$$

のいずれかであることが分かる. ここから (7) から (15) までの等式を使って (A) から (D) までを変形すると

$$x = \frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}, \frac{L_n^+}{L_{n+1}^+}, \frac{L_{n+1}^+}{L_n^+} \quad (n \geq 0)$$

か

$$x = \frac{F_{n+1}^+}{F_n^+} \quad (n \geq 1)$$

のいずれかになることがわかる.

実際 (A) を変形すると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{aF_{2n+1}^+ + bL_{2n+1}^+}{F_{2n+1}^+ + b} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{2aL_{n+1}^+F_n^+ + ab + bL_{2n+1}^+}{2L_{n+1}^+F_n^+ + 2b} \\ &\stackrel{(9)(15)}{=} \frac{2aL_{n+1}^+F_n^+ + 2bL_n^+L_{n+1}^+}{2F_{n+1}^+L_n^+} \\ &\stackrel{(13)}{=} \frac{L_{n+1}^+}{L_n^+} \end{aligned}$$

(B) を変形すると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{aF_{2n+1}^+ - bL_{2n+1}^+}{F_{2n+1}^+ + b} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{2aL_{n+1}^+F_n^+ + ab - bL_{2n+1}^+}{2L_{n+1}^+F_n^+ + 2b} \\ &\stackrel{(9)(15)}{=} \frac{2aL_n^+F_{n+1}^+ - 2bL_n^+L_{n+1}^+}{2F_{n+1}^+L_n^+} \\ &\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{F_n^+}{F_{n+1}^+} \end{aligned}$$

(C) を変形すると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-aF_{2n+1}^+ + bL_{2n+1}^+}{-F_{2n+1}^+ + b} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{-2aL_{n+1}^+F_n^+ - ab + bL_{2n+1}^+}{-2L_{n+1}^+F_n^+} \\ &\stackrel{(9)(15)}{=} \frac{-2aL_n^+F_{n+1}^+ + 2bL_n^+L_{n+1}^+}{-2F_n^+L_{n+1}^+} \\ &\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{L_n^+}{L_{n+1}^+} \end{aligned}$$



(D) を変形すると,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-aF_{2n+1}^+ - bL_{2n+1}^+}{-F_{2n+1}^+ + b} \\
 &\stackrel{(10)}{=} \frac{-2aL_{n+1}^+F_n^+ - ab - bL_{2n+1}^+}{-2L_{n+1}^+F_n^+} \\
 &\stackrel{(15)}{=} \frac{-2aL_{n+1}^+F_n^+ - 2bL_n^+L_{n+1}^+}{-2F_n^+L_{n+1}^+} \\
 &\stackrel{(13)}{=} \frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}
 \end{aligned}$$

□

2.2. **Proof of Theorem 1.5.** まず,

$$L^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right), L^-\left(\frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}\right), L^-\left(-\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-}\right), \quad (n \geq 0)$$

と

$$L^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right) \quad (n \geq 1)$$

が整数となることを示す.

$n = 0$  のときは明らか.

$n \geq 1$  のとき, Theorem 1.4 の証明と同様の方法で, (4), (7) と  $a^2 - mb^2 = -1$  より

$$\begin{aligned}
 L^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right) &= \frac{F_{n+1}^-(F_{n+1}^- - aF_n^-)}{(-1)^n b^2} \\
 L^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right) &= \frac{F_n^-(F_n^- + aF_{n+1}^-)}{(-1)^{n-1} b^2}
 \end{aligned}$$

(6), (8), (12), (14) より

$$\begin{aligned}
 L^-\left(\frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}\right) &= \frac{2bmL_{n+1}^-F_n^-}{(-1)^{n-1} 2mb^2} \\
 L^-\left(-\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-}\right) &= \frac{2L_n^-(mb^2L_n^- + ambF_n^-)}{(-1)^n 2mb^2}
 \end{aligned}$$

$F_n^-(n \geq 0)$  は  $b$  の倍数であるから  $L^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right)$ ,  $L^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right)$ ,  $L^-\left(\frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}\right)$  と  $L^-\left(-\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-}\right)$  は整数.

次に, 有理数  $x$  に対して  $L^-(x) = k$  ( $k$  は整数) とすると  $x$  は

$$x = \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}, \frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}, -\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-} \quad (n \geq 0)$$

か

$$x = -\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} \quad (n \geq 1)$$

のいずれかになることを示す.

$k = 0$  のとき,

$$\frac{1 - ax}{1 - 2ax - x^2} = 0$$

より,

$$x = \frac{1}{a} = \frac{L_0^-}{L_1^-}$$

$k \neq 0$  のとき,

$$\frac{1 - ax}{1 - 2ax - x^2} = k$$

から

$$-kx^2 + a(1 - 2k)x + k - 1 = 0$$

よって

$$x = \frac{-a(1 - 2k) \pm \sqrt{a^2(1 - 2k)^2 - 4k(k - 1)}}{-2k}$$

ここで  $x$  は有理数なので

$$a^2(1 - 2k)^2 + 4k(k - 1) = M^2$$

となる 0 以上の整数  $M$  が存在する. さらに,  $a^2 - mb^2 = -1$  から

$$M^2 - mb^2(2k - 1)^2 = -1$$

が成り立ち, 任意の非負整数  $N$  に対して,  $(L_{2N}^-)^2 - m(F_{2N}^-)^2 \neq -1$  から,  $M = L_{2n+1}^-$  となる非負整数  $n$  が存在し,  $b(2k - 1) = F_{2n+1}^-$  ( $n \geq 0$ ) または,  $b(2k - 1) = -F_{2n+1}^-$  ( $n \geq 1$ ). これから

$$k = \frac{F_{2n+1}^- + b}{2b} (n \geq 0)$$

または

$$k = \frac{-F_{2n+1}^- + b}{2b} (n \geq 1)$$

以上により,

$$x = \frac{aF_{2n+1}^- + bL_{2n+1}^-}{-F_{2n+1}^- - b} (n \geq 0) \cdots (E),$$

$$x = \frac{aF_{2n+1}^- - bL_{2n+1}^-}{F_{2n+1}^- - b} (n \geq 0) \cdots (F),$$

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^- + bL_{2n+1}^-}{F_{2n+1}^- - b} (n \geq 1) \cdots (G),$$

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^+ - bL_{2n+1}^+}{F_{2n+1}^- - b} (n \geq 1) \cdots (H)$$

のいずれかであることが分かる. ここから (7) から (15) までの等式を使って (E) から (H) までを変形すると

$$x = \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}, \frac{L_n^-}{L_{n+1}^-}, -\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-} (n \geq 0)$$

か

$$x = -\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} (n \geq 1)$$

のいずれかになることがわかる。  
 実際, (E) を変形すると,

$$x = \frac{aF_{2n+1}^- + bL_{2n+1}^-}{-F_{2n+1}^- - b}$$

$$\stackrel{(10)}{=} \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n ab + bL_{2n+1}^-}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b}$$

もし  $n$  が偶数なら,

$$\frac{2aL_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n ab + bL_{2n+1}^-}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b} \stackrel{(15)}{=} \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^-}{-2L_{n+1}^- F_n^- - 2b}$$

$$\stackrel{(9)}{=} \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^-}{-2F_{n+1}^- L_n^-}$$

$$= \frac{L_{n+1}^- (aF_n^- + bL_n^-)}{-F_{n+1}^- L_n^-}$$

$$\stackrel{(13)}{=} -\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-}$$

もし  $n$  が奇数なら,

$$\frac{2aL_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n ab + bL_{2n+1}^-}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b} \stackrel{(15)}{=} -\frac{aF_n^- + bL_n^-}{F_n^-}$$

$$\stackrel{(13)}{=} -\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}$$

(F) を変形すると

$$x = \frac{aF_{2n+1}^- - bL_{2n+1}^-}{-F_{2n+1}^- - b} \stackrel{(10)(15)}{=} \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2(-1)^n ab}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b}$$

もし  $n$  が偶数なら

$$\frac{2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2(-1)^n ab}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b} = \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2ab}{-2L_{n+1}^- F_n^- - 2b}$$

$$\stackrel{(9)}{=} \frac{a(2L_{n+1}^- F_n^- + 2b) - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{-2F_{n+1}^- L_n^-}$$

$$\stackrel{(9)}{=} \frac{aF_{n+1}^- - bL_{n+1}^-}{F_{n+1}^-}$$

$$\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}$$

もし  $n$  が奇数なら,

$$\begin{aligned} \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2(-1)^n ab}{-2L_{n+1}^- F_n^- - (-1)^n b - b} &= \frac{2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2ab}{-2L_{n+1}^- F_n^-} \\ &\stackrel{(9)}{=} \frac{L_n^- (aF_{n+1}^- - bL_{n+1}^-)}{-L_{n+1}^- F_n^-} \\ &\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{L_n^-}{L_{n+1}^-} \end{aligned}$$

(G) を変形すると,

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^- + bL_{2n+1}^-}{F_{2n+1}^- - b} \stackrel{(10)(15)}{=} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^- - 2(-1)^n ab}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b}$$

もし  $n$  が偶数なら,

$$\begin{aligned} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^- - 2(-1)^n ab}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b} &= \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^- - 2ab}{2L_{n+1}^- F_n^-} \\ &\stackrel{(9)}{=} \frac{L_{n+1}^- F_n^-}{L_n^- (-aF_{n+1}^- + bL_{n+1}^-)} \\ &\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{L_n^-}{L_{n+1}^-} \end{aligned}$$

もし  $n$  が奇数なら,

$$\begin{aligned} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^- - 2(-1)^n ab}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b} &= \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- + 2bL_n^- L_{n+1}^- + 2ab}{2L_{n+1}^- F_n^- - 2b} \\ &\stackrel{(9)}{=} -\frac{aF_{n+1}^- - bL_{n+1}^-}{F_{n+1}^-} \\ &\stackrel{(12)(13)}{=} \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-} \end{aligned}$$

(H) を変形すると,

$$x = \frac{-aF_{2n+1}^- - bL_{2n+1}^-}{F_{2n+1}^- - b} \stackrel{(10)(15)}{=} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b}$$

もし  $n$  が偶数なら,

$$\begin{aligned} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b} &= \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{2L_{n+1}^- F_n^-} \\ &\stackrel{(13)}{=} -\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} \end{aligned}$$

もし  $n$  が奇数なら,

$$\begin{aligned} \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{2L_{n+1}^- F_n^- + (-1)^n b - b} &= \frac{-2aL_{n+1}^- F_n^- - 2bL_n^- L_{n+1}^-}{2L_{n+1}^- F_n^- - 2b} \\ &\stackrel{(9)}{=} -\frac{L_{n+1}^- (aF_n^- + bL_n^-)}{F_{n+1}^- L_n^-} \\ &\stackrel{(13)}{=} -\frac{L_{n+1}^-}{L_n^-} \end{aligned}$$

□

2.3. **Proof of Theorem 1.6.** まず,

$$F^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right) \quad (n \geq 0)$$

と

$$F^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right) \quad (n \geq 1)$$

が整数となることを示す.  $n \geq 0$  のときは明らか.  $n \geq 1$  のとき, (3), (7) と  $a^2 - mb^2 = 1$  より

$$\begin{aligned} F^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right) &= \frac{bF_n^+ F_{n+1}^+}{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - 2aF_n^+) + F_n^{+2}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{bF_n^+ F_{n+1}^+}{-F_{n+1}^+ F_{n-1}^+ + F_n^{+2}} \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{F_n^+ F_{n+1}^+}{b} \end{aligned}$$

同様に, (3), (7) と  $a^2 - mb^2 = 1$  より

$$\begin{aligned} F^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right) &= \frac{bF_n^+ F_{n+1}^+}{F_{n+1}^+(F_{n+1}^+ - 2aF_n^+) + F_n^{+2}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{bF_n^+ F_{n+1}^+}{-F_{n+1}^+ F_{n-1}^+ + F_n^{+2}} \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{F_n^+ F_{n+1}^+}{b} \end{aligned}$$

$F_n^+$  ( $n \geq 0$ ) は  $b$  の倍数であるから,  $F^+\left(\frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}\right)$  と  $F^+\left(\frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}\right)$  はともに整数となる.

次に, 有理数  $x$  に対して  $F^+(x) = k$  ( $k$  は整数) とすると  $x$  は

$$x = \frac{F_n^+}{F_{n+1}^+} \quad (n \geq 0),$$

$$x = \frac{F_{n+1}^+}{F_n^+} \quad (n \geq 1)$$

のいずれかになることを示す.

$k = 0$  のとき,

$$\frac{bx}{1 - 2ax + x^2} = 0$$

より,

$$x = 0 = \frac{F_0^+}{F_1^+}$$

$k \neq 0$  のとき,

$$\frac{bx}{1 - 2ax + x^2} = k$$

から

$$kx^2 + (-2ak - b)x + k = 0$$

より

$$x = \frac{2ak + b \pm \sqrt{(2ak + b)^2 - 4k^2}}{2k}$$

ここで  $x$  は有理数なので

$$(2ak + b)^2 - 4k^2 = M^2$$

となる 0 以上の整数  $M$  が存在する. さらに,  $a^2 - mb^2 = 1$  から

$$(2kbm + a)^2 - mM^2 = 1$$

が成り立つので,

$$L_{2n+1}^+ = 2kbm + a, F_{2n+1}^+ = M (n \geq 0)$$

となる非負整数  $n$  が存在する. 実際,  $a \pm 1$  は  $mb$  の倍数でない. もしそうでないなら

$$a = mbl \pm 1$$

となる正の整数  $l$  が存在するが,

$$(mbl \pm 1)^2 - mb^2$$

は 1 より大きいので矛盾. さらに (14) より任意の非負整数  $N$  に対して  $L_{2N}^+ - 1$  は  $mb$  の倍数であるので  $L_{2N}^+ \pm a$  は  $mb$  の倍数でない. これから,

$$L_{2n+1}^+ = \pm(2kbm + a)$$

となる非負整数  $n$  が存在するが, もし  $L_{2n+1}^+ = -(2kbm + a)$  とすると (12)(15) より  $L_{2n+1}^+ - a$  は  $mb$  の倍数なので,  $2a$  は  $mb$  の倍数となるがこれはありえないので,

$$L_{2n+1}^+ = 2kbm + a$$

これから,

$$x = \frac{aL_{2n+1}^+ - 1 + bmF_{2n+1}^+}{L_{2n+1}^+ - a} (n \geq 0) \cdots (I),$$

$$x = \frac{aL_{2n+1}^+ - 1 - bmF_{2n+1}^+}{L_{2n+1}^+ - a} (n \geq 0) \cdots (J)$$

のいずれかであることがわかる. (I) を変形すると

$$x = \frac{aL_{2n+1}^+ - 1 + bmF_{2n+1}^+}{L_{2n+1}^+ - a} \stackrel{(12)}{=} \frac{L_{2n+2}^+ - 1}{L_{2n+1}^+ - a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_{n+1}^+}{F_n^+}$$

(J) を変形すると

$$x = \frac{aL_{2n+1}^+ - 1 - bmF_{2n+1}^+}{L_{2n+1}^+ - a} \stackrel{(12)(13)}{=} \frac{L_{2n}^+ - 1}{L_{2n+1}^+ - a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_n^+}{F_{n+1}^+}$$

□

2.4. **Proof of Theorem 1.7.** まず,

$$F^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right) \quad (n \geq 0)$$

と

$$F^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right) \quad (n \geq 1)$$

が整数となることを示す.

$n = 0$  のときは明らか.

$n \geq 1$  のとき, Theorem 1.6 の証明と同じ方法で (4), (7) と  $a^2 - mb^2 = -1$  より

$$F^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right) = \frac{F_n^- F_{n+1}^-}{(-1)^n b}$$

$$F^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right) = \frac{F_n^- F_{n+1}^-}{(-1)^n b}$$

$F_n^-(n \geq 0)$  は  $b$  の倍数であるから,  $F^-\left(\frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}\right)$ ,  $F^-\left(-\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}\right)$  はともに整数.

次に, 有理数  $x$  に対して  $F^-(x) = k$  ( $k$  は整数) とすると  $x$  は

$$x = \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-} \quad (n \geq 0)$$

か

$$x = -\frac{F_{n+1}^-}{F_n^-} \quad (n \geq 1)$$

のいずれかになることを示す.

$k = 0$  のとき,

$$\frac{bx}{1 - 2ax - x^2} = 0$$

より,

$$x = 0 = \frac{F_0^-}{F_1^-}$$

$k \neq 0$  のとき,

$$\frac{bx}{1 - 2ax - x^2} = k$$

から

$$-kx^2 + (-2ak - b)x + k = 0$$

よって

$$x = \frac{2ak + b \pm \sqrt{(2ak + b)^2 + 4k^2}}{-2k}$$

ここで  $x$  は有理数なので

$$(2ak + b)^2 + 4k^2 = M^2$$

となる 0 以上の整数  $M$  が存在する. さらに,  $a^2 - mb^2 = -1$  から

$$(2kbm + a)^2 - mM^2 = -1$$

が成り立つので,

$$L_{2n+1}^- = (-1)^n(2kbm + a), F_{2n+1}^- = M \quad (n \geq 0)$$

となる非負整数  $n$  が存在する. 実際, 任意の非負整数  $N$  に対して  $(L_{2N}^-)^2 - m(F_{2N}^-)^2 \neq -1$  より,

$$L_{2n+1}^- = \pm(2kbm + a)$$

となる非負整数  $n$  が存在する. さらに (12) (15) から  $L_{2n+1}^- - (-1)^n a$  は  $bm$  の倍数なので

$$L_{2n+1}^- = (-1)^n(2kbm + a)$$

これから,

$$x = \frac{(-1)^n a L_{2n+1}^- + 1 + bm F_{2n+1}^-}{(-1)^{n+1} L_{2n+1}^- + a} \quad (n \geq 1) \cdots (K),$$

$$x = \frac{(-1)^n a L_{2n+1}^- + 1 - bm F_{2n+1}^-}{(-1)^{n+1} L_{2n+1}^- + a} \quad (n \geq 1) \cdots (L)$$

のいずれかになることがわかる.  $n$  が偶数のとき (K) を変形すると

$$x = \frac{a L_{2n+1}^- + bm F_{2n+1}^- + 1}{-L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(12)}{=} \frac{L_{2n+2}^- + 1}{-L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_{n+1}^-}{F_n^-}$$

$n$  が奇数のとき (K) を変形すると

$$x = \frac{-a L_{2n+1}^- + bm F_{2n+1}^- + 1}{L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(12)(13)}{=} \frac{-L_{2n}^- + 1}{L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}$$

$n$  が偶数のとき (L) を変形すると

$$x = \frac{a L_{2n+1}^- - bm F_{2n+1}^- + 1}{-L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(12)(13)}{=} \frac{L_{2n}^- + 1}{L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_n^-}{F_{n+1}^-}$$

$n$  が奇数のとき (L) を変形すると

$$x = \frac{-a L_{2n+1}^- - bm F_{2n+1}^- + 1}{L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(12)}{=} \frac{-L_{2n+2}^- + 1}{L_{2n+1}^- + a} \stackrel{(11)}{=} \frac{F_{n+2}^-}{F_{n+1}^-}$$

□

### 3. 研究課題

本研究ではペル方程式

$$x^2 - my^2 = \pm 1 \quad (m \text{ は平方数でない自然数})$$

を扱ったが, ペル方程式

$$x^2 - my^2 = \pm 4 \quad (m \text{ は平方数でない自然数})$$

についても同様の結果がえられるだろうか.



## REFERENCES

- [1] A. Bulawa, W. K. Lee, *Integral values of the Generating Functions for the Fibonacci and related sequences*, Fibonacci Quart. **55** (2017), no. 1, 74-81.
- [2] D. S. Hong, *When is the generating function of the Fibonacci numbers an integer?*, College Math. J. **46** (2015), 110-112.
- [3] 中村滋, フィボナッチ数の生成関数を整数にする有理数, 日本フィボナッチ協会第15回研究集会報告書, 29-30.
- [4] P. Pongsriiam, *Integral values of the Generating Functions of Fibonacci and Lucas Numbers*, College Math. J. **48** (2017), 97-101.
- [5] 高木貞治, 初等整数論講義第2版, 共立出版社, 1971.

# プラスチック定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形

中川 幸一 \*(埼玉大学)

第 17 回日本フィボナッチ協会研究集会  
2019 年 8 月 23 日

## 概要

3 辺の長さの比が黄金比  $\phi$  を用いて  $1 : \sqrt{\phi} : \phi$  と表せる三角形は、 $\phi^2 = \phi + 1$  という黄金比の性質より  $1^2 + (\sqrt{\phi})^2 = \phi^2$  を満たすので直角三角形を表していることが分かる。この三角形はケプラーの三角形と呼ばれている。本研究は、三角形の 3 辺の長さが線形回帰数列から得られる定数を用いて表されるような三角形についての考察をまとめたものである。

## 1 はじめに

フィボナッチ数列

$$F_0 = 0, F_1 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

に対して、隣接二項間の比の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

という値に収束し、 $\phi$  を黄金比という。また、この黄金比は

$$\phi^2 = \phi + 1$$

を満たすという性質を持っている。

直角三角形に対して斜辺の長さを  $c$ 、他の 2 辺の長さを  $a, b$  とすると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

という等式が成り立つ。また逆に、三角形の 3 辺が上記の等式を満たすとき、この三角形は直角三角形となる。この定理をピタゴラスの定理という。

黄金比の性質とピタゴラスの定理より

$$\phi^2 = \phi + 1 \iff 1^2 + (\sqrt{\phi})^2 = \phi^2$$

---

\* k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

がいえるので、3 辺の長さの比が  $1 : \sqrt{\phi} : \phi$  であるとき、この三角形は直角三角形となる。この三角形をケプラーの三角形という。

他にも、3 辺の長さの比が  $\phi : \phi : 1$  である三角形は黄金三角形といい、 $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$  の二等辺三角形となっている。

また、3 辺の長さの比が  $1 : 1 : \phi$  である三角形は黄金のグノモンといい、 $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$  の二等辺三角形となっている。

線形回帰数列から得られる定数は色々知られている。以下にいくつか具体例を示す。

パドヴァン数列

$$P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1; P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$$

に対して、隣接二項間の比の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \rho \approx 1.32471795 \dots$$

という値に収束し、 $\rho$  をプラスチック定数という。また、このプラスチック定数は

$$\rho^3 = \rho + 1$$

を満たすという性質を持っている。

トリボナッチ数列

$$T_0 = T_1 = 0, T_2 = 1; T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

に対して、隣接二項間の比の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{T_{n-1}} = t \approx 1.83929 \dots$$

という値に収束し、 $t$  をトリボナッチ定数という。また、このトリボナッチ定数は

$$t^3 = t^2 + t + 1$$

を満たすという性質を持っている。

ナーラーヤナの牛数列

$$N_0 = N_1 = 0, N_2 = 1; N_{n+3} = N_{n+2} + N_n$$

に対して、隣接二項間の比の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{N_{n-1}} = \psi \approx 1.46557 \dots$$

という値に収束し、 $\psi$  を超黄金比という。また、この超黄金比は

$$\psi^3 = \psi^2 + 1$$

を満たすという性質を持っている。

## 2 ある定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形の条件

$\triangle ABC$  について,  $\angle ACB = \theta$  とすると, 余弦定理より

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2$$

が得られる. ここで三角形の辺の長さの比が, ある定数  $x$  の有理数乗で表されていると仮定する. 3 辺の比を  $a : b : c = 1 : x^\alpha : x^\beta$  とすると 3 辺の関係式は

$$1 + x^{2\alpha} - 2x^\alpha \cos \theta = x^{2\beta}$$

となる.

ここで,  $\theta$  にいくつか具体的な値を入れてみると,

$$\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ) \text{ のとき} \quad x^{2\beta} = x^{2\alpha} + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} (= 60^\circ) \text{ のとき} \quad x^{2\beta} = x^{2\alpha} - x^\alpha + 1$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ) \text{ のとき} \quad x^{2\beta} = x^{2\alpha} + x^\alpha + 1$$

$$\theta = \pi (= 180^\circ) \text{ のとき} \quad x^{2\beta} = x^{2\alpha} + 2x^\alpha + 1 = (x^\alpha + 1)^2 \text{ より } x^\beta = x^\alpha + 1$$

となる.

## 3 線形回帰数列から得られる定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形

ここで,  $\phi, \rho, t, \psi$  の満たす性質を再掲する.

- $\phi^2 = \phi + 1$
- $\rho^3 = \rho + 1$
- $t^3 = t^2 + t + 1$
- $\psi^3 = \psi^2 + 1$

また, 三角形の 3 辺の比が  $a : b : c = 1 : x^\alpha : x^\beta$  であるような三角形を  $(0, \alpha, \beta)$  で表すことにする. ( $x^0 = 1$  より 0 を用いた)

自明なものとして以下のものが直ちに分かる.

$$\theta = \pi (= 180^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, 2) \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

$$\theta = \pi (= 180^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, 3) \Rightarrow \rho^3 = \rho + 1$$

$$\theta = \pi (= 180^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 2, 3) \Rightarrow \psi^3 = \psi^2 + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ) \text{ のとき} \quad (0, \frac{1}{2}, 1) \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ) \text{ のとき} \quad (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow \rho^3 = \rho + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, \frac{3}{2}) \Rightarrow \psi^3 = \psi^2 + 1$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, \frac{3}{2}) \Rightarrow t^3 = t^2 + t + 1$$

これに対して、非自明なものとしては以下のものが見つかった。

$$\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 2, \frac{5}{2}) \text{ より } x^5 = x^4 + 1 \iff (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1) = 0$$

$$\therefore \rho^3 = \rho + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} (= 60^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 2, \frac{3}{2}) \text{ より } x^3 = x^4 - x^2 + 1 \iff (x - 1)(x^3 - x - 1) = 0$$

$$\therefore \rho^3 = \rho + 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} (= 60^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 3, \frac{5}{2}) \text{ より } x^5 = x^6 - x^3 + 1 \iff (x - 1)(x^2 + 1)(x^3 - x - 1) = 0$$

$$\therefore \rho^3 = \rho + 1$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, 2) \text{ より } x^4 = x^2 + x + 1 \iff (x + 1)(x^3 - x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore \psi^3 = \psi^2 + 1$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ) \text{ のとき} \quad (0, 1, \frac{5}{2}) \text{ より } x^5 = x^2 + x + 1 \iff (x^2 + 1)(x^3 - x - 1) = 0$$

$$\therefore \rho^3 = \rho + 1$$

( $\therefore$  これらのことは、 $\beta \neq 0$  かつ  $\beta > 0$  からいえる.)

## 4 Open Problem

- 今まで述べた三角形以外に、 $\phi, \rho, t, \psi$  の有理数乗の辺の長さを持つ三角形は存在するか?
- ある定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形は沢山作ることができる。逆に特定の線形回帰数列に対して得られる定数を用いて、その定数の有理数乗の辺の長さを持つ三角形は存在するか?

## 参考文献

- [1] Thomas Koshy, "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications (2nd ed.)", John Wiley & Sons, 2017.

## 問題コーナー

展示 (242教室)

問題 1 小梁 修

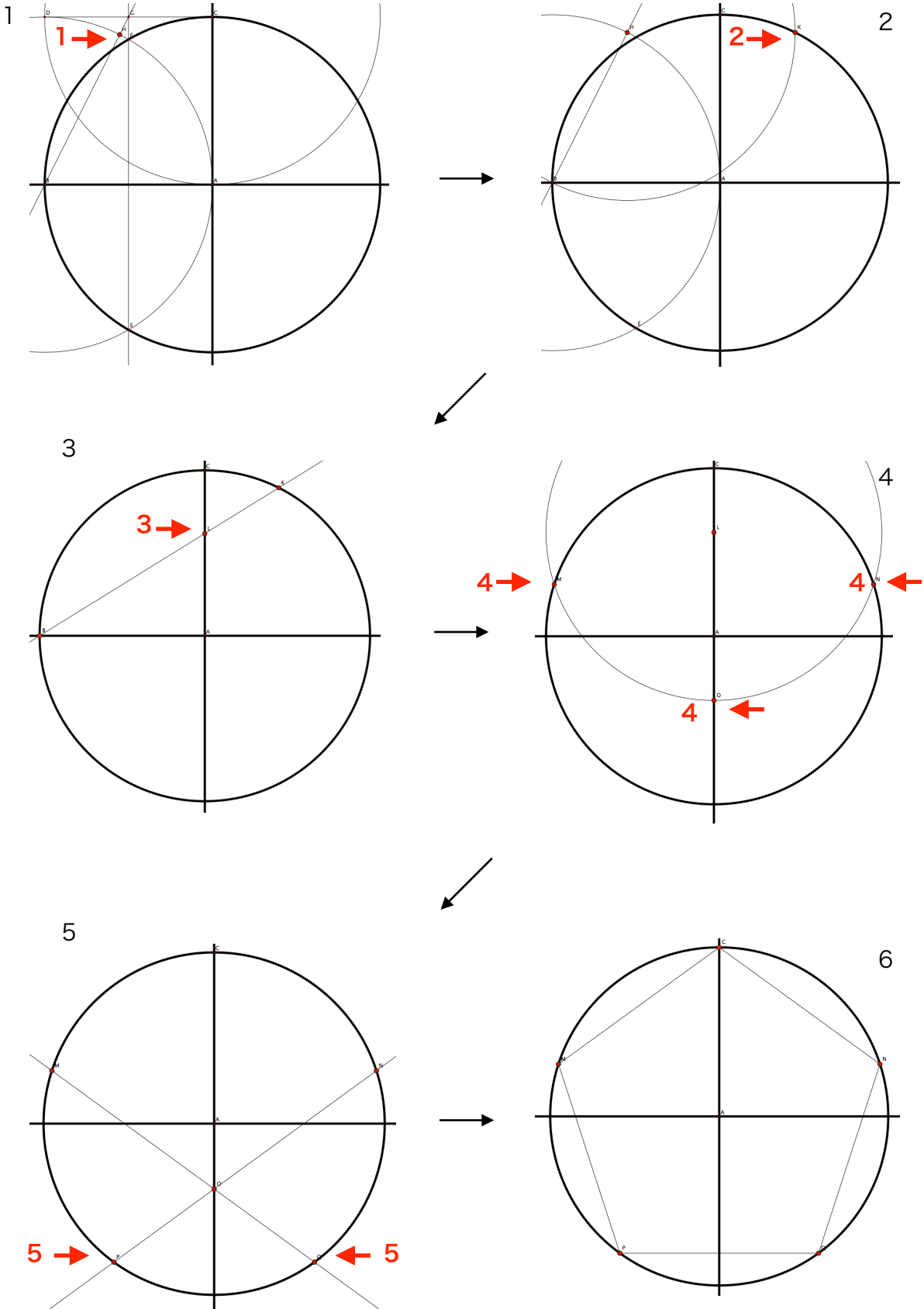
問題 2 小梁 修

問題 3 渋川元樹

問題 4 飯高 茂

下記、「正五角形作図」の正当性を証明してください。

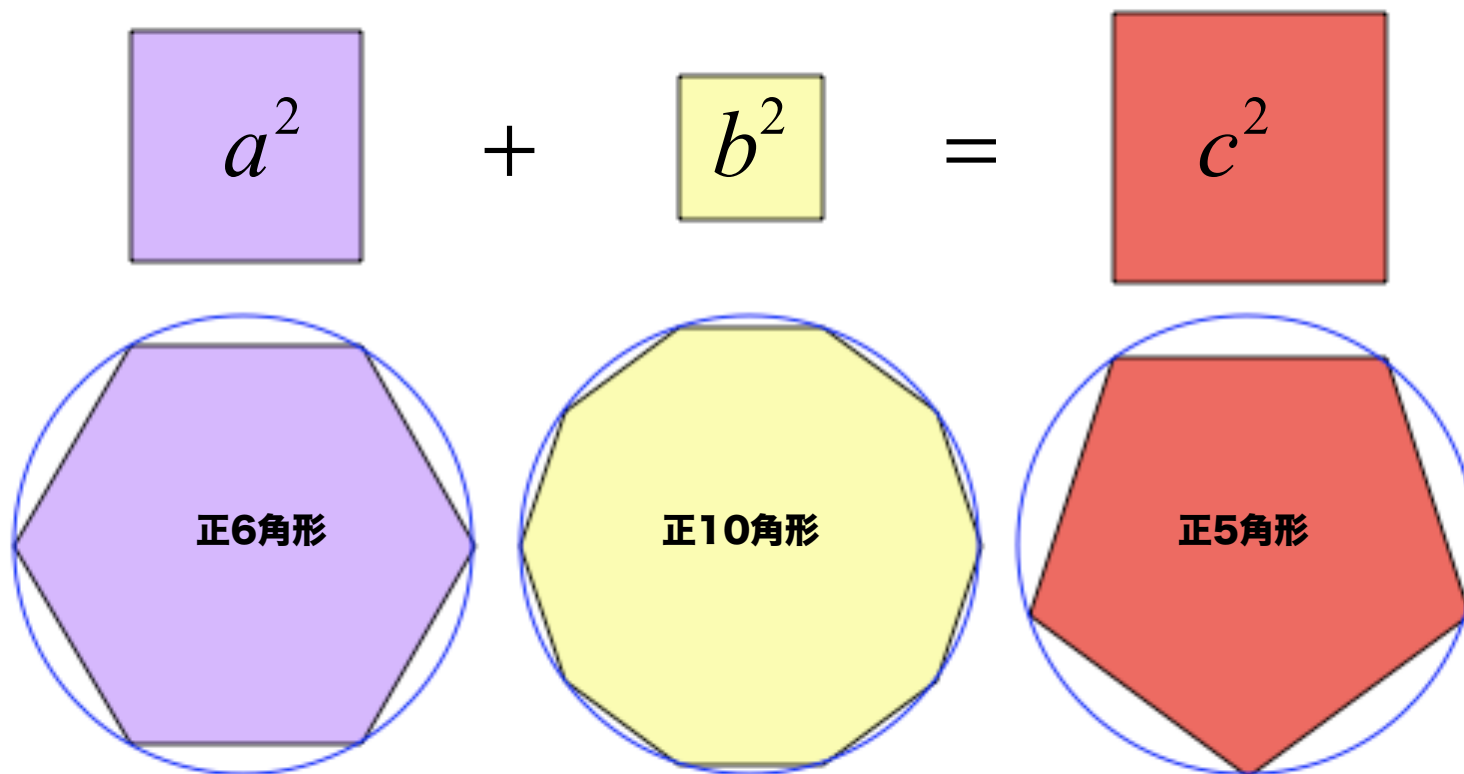
コンパスの足を固定したまま作図します。(下図の円の半径は全て等しい。)



## 問題

下記を証明してください。

「同一の円に内接する正六角形の辺長を  $a$ 、正十角形の辺長を  $b$ 、正五角形の辺長を  $c$  とします。このとき、 $a \cdot b \cdot c$  は  $a^2 + b^2 = c^2$  を満たす。また、 $a : b$  が黄金比となる。」





# 未解決問題

渋川元樹\* (神戸大理)

$F_n^{(r)}, L_n^{(r)}$  を, それぞれ  $r$  個の初期値が

$$F_1^{(r)} = 1, \quad F_0^{(r)} = F_{-1}^{(r)} = \dots = F_{-r+2}^{(r)} = 0,$$
$$L_n^{(r)} = \begin{cases} -2^{2m-1} + \frac{2r+1}{2} \binom{2m}{m} & (n = 2m) \\ 4^m & (n = 2m + 1) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots, r-1)$$

で漸化式

$$a_{n+r}^{(r)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r-1-j}{j} a_{n+r-1-2j}^{(r)} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r-1-j}{j+1} a_{n+r-2-2j}^{(r)}$$

を満たす数列として定める. ここで  $\lfloor x \rfloor$  は実数  $x$  を越えない最大の整数であり,  $\binom{n}{k}$  は二項係数

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & (k \neq 0) \\ 1 & (k = 0) \end{cases}$$

である.

このとき, 次の不等式が成り立つ.

(1)

$$1 \leq F_n^{(1)} \leq F_n^{(2)} \leq F_n^{(3)} \leq F_n^{(4)} \leq \dots$$

(2)

$$1 \leq L_n^{(1)} \leq L_n^{(2)} \leq L_n^{(3)} \leq L_n^{(4)} \leq \dots$$

詳細は [渋川] 参照.

## 参考文献

[渋川] 渋川元樹: *cosine abenacci* 数と *cosine abelucas* 数の不等式, 第 17 回日本フィボナッチ協会研究会報告集

---

\*g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$  を用いる.

$\Psi_{2,3}(a) = -m$  を満たすとき,  $a$  を平行移動  $m$  の (2,3) 型 3 項完全数という.

$a$  が素数  $p$ , または  $2^e$  なら  $\Psi_{2,3}(a) = -1$ .

問題 1  $\Psi_{2,3}(a) = -1$  なら  $a$  が素数, または  $2^e$  となるか.

表 1:  $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2, m = 2$  のときの解

$a$	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$
29 5923739527652742180310	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$
9	$3^2$
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の 2 倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 65537$

問題 2  $m = 2$  の解はこれだけか?

2 に続いて特殊な意味を持つ素数が 6 個も続くのは大いなる不思議というべきである. これを 6 素数の奇跡と呼んでみたい.

私の生年月日である 1942 年 5 月 29 日のうちの月と日が出たことに大きな感動を覚える.



図 1: 6 素数のシンボルキャラクター; By Jun Iitaka

( 飯高 茂 iitakashigeru@gmail.com, HP: <http://iitakashigeru.math-academy.net> )